

1. a) Determinați numerele întregi x și y care verifică relația

$$x^2 + y^2 = x + y + xy.$$

b) Arătați că ecuația

$$x^2 + y^2 = x + y + xy + 2013$$

nu are soluții întregi.

c) Arătați că ecuația

$$x^2 + y^2 = x + y + xy + 2014$$

nu are soluții întregi.

d) Arătați că există o infinitate de valori naturale ale lui n pentru care ecuația

$$x^2 + y^2 = x + y + xy + n$$

are soluții întregi și că există o infinitate de valori naturale ale lui n pentru care ecuația de mai sus nu are rădăcini întregi.

2. Ana a scris 34 de numere naturale pe câte un cartonaș și a plasat cartonașele cu fața în jos, pe o masă. Într-o mutare, Bogdan poate să întrebe care este paritatea sumei numerelor scrise pe 7 cartonașe alese de el. Care este numărul minim de mutări după care Bogdan poate determina paritatea sumei tuturor celor 34 de numere scrise pe cartonașe.

3. În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră două puncte, M și N , astfel încât $m(\angle MAN) = m(\angle MCN) = 45^\circ$, $M \in \text{Int}(\angle NAD)$. Suprafețele triunghiurilor MAD , MCN și NAB se colorează cu roșu, iar suprafețele triunghiurilor MCD , MAN și NCB se colorează cu albastru.

Arătați că suprafața colorată cu roșu și suprafața colorată cu albastru au aceeași arie.