1. În vârfurile unui cub se scriu numerele de la 1 la 8, apoi pe fiecare din muchiile cubului se scrie modulul diferenţei numerelor scrise în vârfurile din capetele muchiei. Care este numărul minim de numere diferite care pot fi obţinute pe muchii?

Concurs Rusia

Soluţie.
Pe cele trei muchii care pleacă din vârful în care este scris numărul 8 sunt scrise trei numere diferite, deci minimul căutat este cel puţin 3. . . . . **4 puncte**
Pe de altă parte, este uşor de construit un exemplu de cub $ABCDA'B'C'D'$ în care pe muchii figurează exact 3 numere diferite. Iată un asemenea exemplu:
$A(1)$, $B(2)$, $C(4)$, $D(3)$, $A'(5)$, $B'(6)$, $C'(8)$, $D'(7)$ unde numărul din paranteză indică numărul care se scrie în vârful respectiv. Pe muchii se obţin numerele 1, 2 şi 4. . . . . **3 puncte**

2. Trei cercuri concentrice au razele 1, 2 şi 3. Pe fiecare din aceste cercuri se consideră câte un punct astfel încât cele trei puncte să fie vârfurile unui triunghi echilateral. Ce valori poate lua lungimea laturii acestui triunghi?

* * *

Soluţie.
Fie O centrul cercurilor si $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral cu A_i pe cercul de rază i $(i = 1, 2, 3)$. Deoarece $OA_3 = OA_1 + OA_2$, rezultă că $A_1OA_2A_3$ e inscriptibil (din teorema lui Ptolemeu sau van Schooten) şi că $m(A_1OA_2) = 120°$. . . . . . . **5 puncte**
Atunci $A_1A_2^2 = 1^2+2^2+1\cdot 2 = 7$, adică $A_1A_2 = \sqrt{7}$. Deci mulţimea valorilor posibile ale lungimii laturilor unui asemenea triunghi echilateral este inclusă în mulţimea $\{\sqrt{7}\}$. Este uşor de construit efectiv un asemenea triunghi: se ia A_3 arbitrar pe cercul mare, apoi A_1 şi A_2 pe cele două semidrepte care fac unghi de 60° cu $(OA_3$. Triunghiul obţinut este într-adevăr echilateral. . . . . **2 puncte**

3. Şirul p_n este definit recursiv astfel: $p_1 = 2$ şi p_{n+1} este cel mai mare factor prim al lui $p_1p_2 \cdots p_n + 1$, pentru $n \geq 1$.
a) Este 5 termen al şirului?
b) Este 11 termen al şirului?

* * *

Soluţie.
Calculăm următorii termeni ai şirului: $p_2 = 3$, $p_3 = 7$.
a) Presupunem, prin absurd, că 5 ar fi termen al şirului. Dacă $p_n = 5$, $(n \geq 4)$, cum toţi termenii şirului începând cu al treilea nu sunt divizibili nici cu 2, nici cu 3, ar trebui ca p_n să fie o putere a lui 5. Dar relaţia $p_1p_2 \cdots p_{n-1} + 1 = 5^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, nu poate avea loc: membrul stâng dă restul 3 la împărţirea cu 4, în vreme ce membrul

drept dă rest 1. .... **2 puncte**
b) Presupunem, prin absurd, că 11 ar fi termen al şirului. Dacă $p_n = 11$, $(n \geq 4)$, înseamnă că $p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1 = 5^k 11^\ell$, cu $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$. Membrul stâng dă rest 3 la împărţirea cu 4, 5^k dă rest 1, deci trebuie ca 11^ℓ să dea rest 3 la împărţirea cu 4. Dar $11^\ell = (12-1)^\ell = \mathcal{M}4 + (-1)^\ell$, deci ℓ trebuie să fie impar. Pe de altă parte, membrul stâng dă rest 1 la împărţirea cu 3, iar $11^\ell = (12-1)^\ell = \mathcal{M}3 + (-1)^\ell = \mathcal{M}3 - 1$ (căci ℓ este impar). Deducem că 5^k trebuie să fie de forma $\mathcal{M}3 - 1$. Dar $5^k = (6-1)^k = \mathcal{M}3 + (-1)^k$, deci trebuie şi k să fie impar. Atunci $5^k 11^\ell = 55u^2$, deci ar trebui ca $p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} + 1 = 55u^2$. Membrul stâng dă rest 1 la împărţirea cu 7, iar $55 = \mathcal{M}7 - 1$, deci ar trebui ca u^2 să dea rest 6 la împărţirea cu 7, ceea ce nu se poate (un pătrat perfect dă unul dintre resturile 0, 1, 2 sau 4 la împărţirea cu 7). Am obţinut aşadar o contradicţie. Prin urmare 11 nu este termen al şirului.
.... **5 puncte**