Subiecte şi soluţii, clasa a VII-a

1. Determinaţi numărul perechilor de mulţimi (A, B) care îndeplinesc simultan condiţiile:
a) $A \cup B \subseteq \{1, 2, ..., 2012\}$,
b) $A \cap B \subseteq \{1, 2, ..., 1006\}$,
c) $A \setminus B \neq \varnothing$.

Manuela Prajea

Soluţie.
Numărăm mai întâi perechile (A, B) care îndeplinesc condiţiile a) şi b). Pentru fiecare din numerele 1, 2, 3, ..., 1006 sunt 4 variante: el poate aparţine lui $A \setminus B$, lui $A \cap B$, lui $B \setminus A$ sau să nu aparţină nici lui A, nici lui B. Pentru fiecare din numerele 1007, 1008, 1009, ..., 2012 sunt 3 variante: el poate aparţine lui $A \setminus B$, lui $B \setminus A$ sau să nu aparţină nici lui A, nici lui B. Aşadar sunt $4^{1006} \cdot 3^{1006}$ asemenea perechi de mulţimi. . . . .**4 puncte**
Dintre aceste perechi trebuie eliminate perechile pentru care $A \setminus B = \varnothing$. Să numărăm aceste perechi:
Pentru fiecare din numerele 1, 2, 3, ..., 1006 sunt 3 variante: el poate aparţine lui $A \cap B$, lui $B \setminus A$ sau să nu aparţină nici lui A, nici lui B. Pentru fiecare din numerele 1007, 1008, 1009, ..., 2012 sunt 2 variante: el poate aparţine lui $B \setminus A$ sau să nu aparţină nici lui A, nici lui B. Aşadar sunt $3^{1006} \cdot 2^{1006}$ perechi de mulţimi care nu satisfac c). Prin urmare sunt $4^{1006} \cdot 3^{1006} - 3^{1006} \cdot 2^{1006}$ perechi care satisfac cele trei proprietăţi. . . . .**3 puncte**

2. Aflaţi cel mai mic multiplu al lui 81 care are:
a) numai cifre de 1.
b) o cifră de 0 şi în rest numai cifre de 1.

* * *

Soluţie.
a) Fie n numărul de cifre al multiplului căutat. Trebuie ca $10^n - 1$ să fie divizibil cu 3^6. Ştim că $n = \varphi(3^6) = 2 \cdot 3^5$ satisface $10^n - 1 \,\vdots\, 3^6$. Din $3^6 \mid (10^{3^5} - 1)(10^{3^5} + 1)$ şi $10^{3^5} + 1 = \mathcal{M}9 + 2$ rezultă că $3^6 \mid (10^{3^5} - 1)$. Dar $10^{3^5} - 1 = (10^{3^4} - 1)(10^{2 \cdot 3^4} + 10^{3^4} + 1) = (10^{3^4} - 1)(\mathcal{M}9 + 3) = (10^{3^3} - 1)(10^{2 \cdot 3^3} + 10^{3^3} + 1)(\mathcal{M}9 + 3) = (10^{3^3} - 1)(\mathcal{M}9 + 3)(\mathcal{M}9 + 3) = ... = (10^3 - 1)(M_9 + 3)(M_9 + 3)(M_9 + 3)(M_9 + 3) = M3^7$ deci este suficient să alegem $n = 3^4 = 81$. . . . .**5 puncte**
b) Trebuie cel puţin 9 cifre de 1; încercăm cu 9 de 1 şi un 0.
Prin verificare se constată că singurul număr de această formă care e divizibil cu 81 este 1111111101. . . . . **2 puncte**

Soluţie alternativă pentru a):
Din $v_3(10^n - 1) = v_3(10 - 1) + v_3(n)$ (lema *Lifting the Exponent*), rezultă că pentru

ca $v_3(10^n - 1) = 6$ trebuie $v_3(n) = 4$, deci n minim este $3^4 = 81$.

3. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi punctul $M \in (BD)$. Demonstraţi că $MB \cdot MD \leq MA \cdot MC$ şi precizaţi când are loc egalitatea.

Claudiu-Ştefan Popa

Soluţie.
Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului. Dacă $M = O$ avem evident relaţia din enunţ.
Dacă $M \neq O$, de exemplu $M \in (OB)$, atunci considerăm punctul E intersecţia semidreptei $(AM$ cu cercul circumscris dreptunghiului. Din puterea punctului M, avem $MB \cdot MD = MA \cdot ME$. . . . . **2 puncte**
Vom arăta că $ME < MC$. Considerând cercul cu centrul în M şi de rază ME, acest cerc intersectează cercul circumscris dreptunghiului în E şi în simetricul acestuia faţă de OB. Prin urmare punctul C se află în exteriorul cercului cu centrul în M şi de rază ME, deci $ME < MC$. . . . . **4 puncte**
Prin urmare egalitate avem dacă şi numai dacă $M = O$. . . . . **1 puncte**