CLASA a VIII-a

Problema 1.

a) O submulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *închisă la înmulţire* dacă oricare ar fi $x, y \in A$ avem şi $xy \in A$. Determinaţi toate mulţimile finite închise la înmulţire.

b) O submulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{Z}$ se numeşte *închisă la scădere* dacă oricare ar fi $x, y \in A$ avem şi $x - y \in A$. Demonstraţi că există o singură mulţime finită închisă la scădere, şi determinaţi toate mulţimile infinite închise la scădere.

Problema 2. Fie numerele reale $a, b, c \in [0, 1]$ cu proprietatea

$$ab + bc + ca = 1.$$

Demonstraţi că

$$1 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2.$$

Precizaţi situaţiile când au loc egalităţile.

Problema 3. Se consideră tetraedrul $ABCD$. Demonstraţi că dacă fiecare din unghiurile $\angle BAC$, $\angle CAD$ şi $\angle DAB$ este ascuţit şi are măsura de cel puţin 60°, iar $AB + AC + AD \geq BC + CD + DB$, atunci $ABCD$ este tetraedru regulat.