CONCURSUL VIITORI OLIMPICI

ediţia a VII-a, 20 august 2014

CLASA A VII-A

Problema 1. Determinaţi numerele naturale n care se pot scrie ca produs de trei numere de forma $\frac{2k+1}{k+1}$, unde $k \in \mathbb{N}$.

ViitoriOlimpici.ro, etapa 4, problema 1

Soluţie. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = \frac{2a+1}{a+1} \cdot \frac{2b+1}{b+1} \cdot \frac{2c+1}{a+1}$. $(*)$

Întrucât $\frac{2k+1}{k+1} < 2$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, rezultă $n < 8$. În plus, deoarece membrul stâng al egalităţii

$$(2a+1)(2b+1)(2c+1) = n(a+1)(b+1)(c+1),$$

este impar, deducem că n este impar (şi a, b, c pare), deci singurele valori admisile ale lui n pot fi 1, 3, 5 şi 7. Vom arăta că fiecare din aceste numere se poate scrie sub forma $(*)$. Avem:

- pentru $a = b = c = 0$ obţinem $n = \frac{2 \cdot 0+1}{0+1} \cdot \frac{2 \cdot 0+1}{0+1} \cdot \frac{2 \cdot 0+1}{0+1} = 1$;
- pentru $a = 0$, $b = 2$, $c = 4$ obţinem $n = \frac{2 \cdot 0+1}{0+1} \cdot \frac{2 \cdot 2+1}{2+1} \cdot \frac{2 \cdot 4+1}{4+1} = 3$;
- pentru $a = b = 2$, $c = 4$, obţinem $n = \frac{2 \cdot 2+1}{2+1} \cdot \frac{2 \cdot 2+1}{2+1} \cdot \frac{2 \cdot 4+1}{4+1} = 5$;
- pentru $a = 6$, $b = 12$, $c = 24$, obţinem $n = \frac{2 \cdot 6+1}{6+1} \cdot \frac{2 \cdot 12+1}{12+1} \cdot \frac{2 \cdot 24+1}{24+1} = 7$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un trapez, cu $AB \parallel CD$, şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AD)$ astfel încât $AM \perp BC$ şi $BN \perp AD$. Se notează cu A' şi B' simetricele punctelor A, respectiv B, faţă de punctele M, respectiv N. Demonstraţi că $\angle AA'D \equiv \angle BB'C$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2014

Soluţie. Deoarece $DC \parallel AB$, triunghiurile CAB şi DAB au arii egale, deci $AM \cdot BC = BN \cdot AD$, de unde rezultă că

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{BN} = \frac{2AM}{2BN} = \frac{AA'}{BB'}. \tag{1}$$

Întrucât $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{ANB}) = 90°$, patrulaterul $ABMN$ este inscriptibil, deci $\widehat{NAM} \equiv \widehat{NBM}$, adică $\widehat{DAA'} \equiv \widehat{CBB'}$. (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $\Delta ADA' \sim \Delta BCB'$, de unde $\widehat{AA'D} \equiv \widehat{BB'C}$.

Problema 3. Un profesor de matematică scrie pe tablă un număr natural nenul n şi le cere celor treizeci de elevi ai săi să indice divizori proprii distincţi ai numărului n. Unul dintre elevi declară că n este divizibil cu 2. Al doilea elev afirmă că n este divizibil cu 3, al treilea că n este divizibil cu 4 şi aşa mai departe, până la al treizecelea, care declară că n este divizibil cu 31.

Profesorul observă că doar două din cele treizeci de afirmaţii făcute de elevii săi sunt false şi, mai mult, că acestea au fost făcute una după alta. Care au fost cele doua afirmaţii false?

Concursul Arany Daniel 2011-2012

Soluţie.

Fie $A = \{2, 3, 4, ..., 31\}$; din enunţ rezultă că există $p \in \mathbb{N}$, cu $2 \leq p \leq 30$, astfel încât n este divizibil cu toate elementele mulţimii $A \setminus \{p, p+1\}$.

Deoarece $p \nmid n$, rezultă că A nu poate conţine niciun multiplu de p; în particular $2p \notin A$, deci $2p \geq 32$, adică $p \geq 16$.

Ca urmare, n este divizibil cu toate elementele mulţimii $B = \{2, 3, 4, ..., 15\}$ şi, folosind proprietăţile relaţiei de divizibilitate, rezultă că n este divizibil şi cu toate elementele mulţimii $C = \{18, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30\}$. În consecinţă, $\{p, p+1\} \subset A \setminus (B \cup C) = \{16, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31\}$.

Singura posibilitate este $p = 16$, deci afirmaţiile false au fost: „n este divizibil cu 16" şi „n este divizibil cu 17".