

CONCURSUL GAZETA MATEMATICĂ ȘI VIITORIOOLIMPICI.RO

17-22 AUGUST 2015, CÂMPULUNG MUSCEL

CLASA A VIII-A - BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

a) Este inegalitatea $PA + PB < CA + CB$ adevărată pentru orice triunghi ABC și orice punct P din interiorul acestuia?

b) Este inegalitatea $PA + PB + PC < DA + DB + DC$ adevărată pentru orice tetraedru $ABCD$ și orice punct P din interiorul acestuia?

ViitoriOlimpici.ro

Soluție:

a) Inegalitatea este adevărată. Fie $\{Q\} = AP \cap BC$. Folosind inegalitatea triunghiului, avem $PA + PB < PA + (PQ + QB) = AQ + QB < (AC + CQ) + QB = AC + CB$ **3p**

b) Inegalitatea nu este adevărată în orice tetraedru. Se pot descrie numeroase exemple.

1. De exemplu, alegând ABC un triunghi dreptunghic isoscel, cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AB = AC = 100$, iar D astfel ca $DA \perp (ABC)$, $DA = 1$, atunci $DA + DB + DC = 1 + 2\sqrt{10001} \approx 201$. Alegând punctul P foarte aproape de B , vom avea $PA + PB + PC \approx BA + BC = 100 + 100\sqrt{2} \approx 241 > 201$.

2. Vom da și un exemplu riguros: considerăm o piramidă regulată cu baza BCD de latură 3 și muchie laterală de lungime 100. Atunci $DA + DB + DC = 106$. Fie O centrul bazei. Atunci $BO = \sqrt{3}$. Înălțimea piramidei este $AO = \sqrt{9997} > 99$. Alegem $P \in (AO)$ astfel încât $PO = 99$. Atunci $PB = PC = \sqrt{3 + 99^2} = \sqrt{9804}$, deci $PA + PB + PC = 2\sqrt{9804} + \sqrt{9997} - 99 > 2 \cdot 99 + 99 - 99 = 198 > 106$. **4p**

Problema 2.

a) Aflați toate numerele prime p știind că ecuația

$$x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 3xyz = p^2$$

are soluții numere naturale nenule.

Gazeta Matematică 6-7-8/2015

b) Aflați toate numerele prime p și numerele naturale nenule n pentru care ecuația

$$x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz = p^n$$

are soluții numere naturale nenule și determinați numărul acestor soluții.

Andrei Eckstein

Soluție:

a) Ecuația se scrie echivalent $(x + y + z)(xy + yz + zx) = p^2$ **1p**
 Cum $xy \geq x \geq 1$, $yz \geq y \geq 1$, $zx \geq z \geq 1$ rezultă că $1 < x + y + z \leq xy + yz + zx$,
 deci singura posibilitate este $x + y + z = xy + yz + zx = p$. Ori egalitate în ine-
 galitatea $x + y + z \leq xy + yz + zx$ avem numai pentru $x = y = z = 1$, deci $p = 3$
 ($x = y = z = 1$ verifică într-adevăr ecuația pentru $p = 3$). **1p**

b) Ecuația se scrie echivalent $(x + y)(y + z)(z + x) = p^n$ **1p**
 Dintre numerele x, y, z există măcar două de aceeași paritate, deci suma lor este
 pară, prin urmare $(x + y)(y + z)(z + x)$ este par. Rezultă că p este par. Fiind prim,
 rezultă $p = 2$ **1p**

Membrul stâng fiind cel puțin $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 2^3$, pentru $n \in \{1, 2\}$ ecuația
 nu are soluții, iar pentru $n = 3$ avem soluția unică $x = y = z = 1$. Pentru $n \geq 4$,
 trebuie ca $x + y = 2^a$, $y + z = 2^b$, $z + x = 2^c$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $a + b + c = n$. Atunci
 $2(x + y + z) = (x + y) + (y + z) + (z + x) = 2^a + 2^b + 2^c$, de unde $x + y + z = \frac{2^a + 2^b + 2^c}{2}$,
 deci $x = (x + y + z) - (y + z) = \frac{2^a + 2^c - 2^b}{2}$, $y = \frac{2^a + 2^b - 2^c}{2}$, $z = \frac{2^b + 2^c - 2^a}{2}$.
 **1p**

Pentru ca $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ trebuie ca $2^a, 2^b, 2^c$ să fie lungimi de laturi de triunghi, adică
 cele mai mari două dintre numerele a, b, c să fie egale.

Dacă $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}^*$, (a, b, c) poate fi $(2k, 2k, 2k)$, $(2k - 2, 2k + 1, 2k + 1)$,
 $(2k - 4, 2k + 2, 2k + 2)$, ..., $(2, 3k - 1, 3k - 1)$ sau permutări ale acestora, deci
 ecuația are $1 + 3(k - 1) = 3k - 2$ soluții.

Dacă $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a, b, c) poate fi $(2k - 1, 2k + 1, 2k + 1)$, $(2k -$
 $3, 2k + 2, 2k + 2)$, ..., $(1, 3k, 3k)$ sau permutări ale acestora, deci ecuația are $3k$
 soluții.

Dacă $n = 6k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a, b, c) poate fi $(2k, 2k + 1, 2k + 1)$, $(2k - 2, 2k +$
 $2, 2k + 2)$, ..., $(2, 3k, 3k)$ sau permutări ale acestora, deci ecuația are $3k$ soluții.

Dacă $n = 6k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a, b, c) poate fi $(2k + 1, 2k + 1, 2k + 1)$,
 $(2k - 1, 2k + 2, 2k + 2)$, ..., $(1, 3k + 1, 3k + 1)$ sau permutări ale acestora, deci
 ecuația are $3k + 1$ soluții.

Dacă $n = 6k + 4$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a, b, c) poate fi $(2k, 2k + 2, 2k + 2)$,
 $(2k - 2, 2k + 3, 2k + 3)$..., $(2, 3k + 1, 3k + 1)$ sau permutări ale acestora, deci
 ecuația are $3k$ soluții.

Dacă $n = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a, b, c) poate fi $(2k + 1, 2k + 2, 2k + 2)$,
 $(2k - 1, 2k + 3, 2k + 3)$..., $(1, 3k + 2, 3k + 2)$ sau permutări ale acestora, deci
 ecuația are $3k + 3$ soluții.

În concluzie, ecuația are soluții naturale nenule dacă și numai dacă $p = 2$ și $n \in$
 $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2, 4\}$ **2p**

Problema 3.

- a) Dați exemplul de o mulțime formată din 10 numere naturale care are proprietatea că, oricum am alege șase elemente distincte ale ei, suma acestora nu este divizibilă cu 6.
- b) Demonstrați că orice mulțime formată din 11 numere naturale are cel puțin o submulțime cu șase elemente a căror sumă este divizibilă cu 6.

Soluție:

a) De exemplu orice mulțime formată cu cinci numere divizibile cu 6 și cinci numere care dau restul 1 la împărțirea cu 6, în particular $\{0, 1, 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 25\}$.

..... **3p**

b) Fie $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{11}\} \subset \mathbb{N}$. Din orice trei numere naturale putem alege două astfel ca suma lor să fie un număr par. Alegem 3 numere din mulțimea M . Vom putea forma o pereche cu suma pară. Rămân 9 numere. Alegem trei. Extragem două cu suma pară. Continuăm procedeul până când obținem 5 perechi disjuncte de elemente din M cu suma în fiecare pereche un număr par.

Din orice cinci numere putem alege trei cu suma divizibilă cu 3. Într-adevăr, dacă avem trei numere care dau un același rest la împărțirea la 3, le alegem pe acelea, iar dacă nu, atunci trebuie să avem cel puțin câte un număr care dă rest 0, 1 respectiv 2 la împărțirea cu 3 și alegem câte unul de fiecare fel. Procedând astfel cu cele 5 sume obținute anterior, obținem 3 sume a căror sumă este divizibilă cu 6, adică obținem 6 elemente cu suma divizibilă cu 6. **4p**