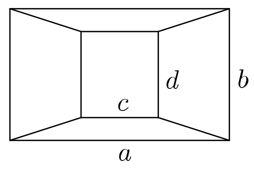
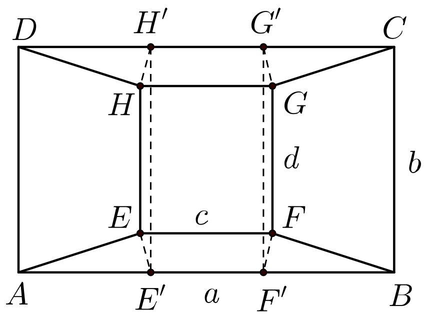
Problema 1. Figura alăturată înfăţişează un poliedru văzut de sus. ,,Bazele" sale sunt dreptunghiuri, feţele laterale sunt trapeze isoscele, iar înălţimea sa este h. Aflaţi volumul poliedrului în funcţie de a, b, c, d şi h.

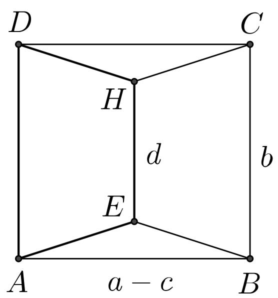


* * *

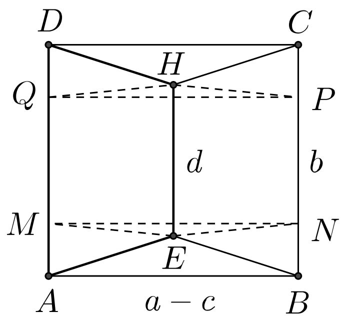
Cu notaţiile din figura de mai jos ($ABCD$ şi $EFGH$ sunt dreptunghiuri cu laturile paralele, E', F' sunt proiecţiile lui E şi F pe AB, iar G', H' sunt proiecţiile lui G şi H pe CD), avem că $EE'H'HFF'G'G$ este o prismă patrulateră, în care bazele $EE'H'H$ şi $FF'G'G$ sunt trapeze isoscele având baza mare $E'H' = F'G' = b$, baza mică $EH = FG = d$ şi înălţimea h. Înălţimea prismei este $EF = c$, deci volumul acestei prisme este $\dfrac{(b+d)h}{2} \cdot c$.



Dacă tăiem poliedrul în trei părţi după planele $(EE'H'H)$ şi $(FF'G'G)$, îndepărtăm prisma al cărei volum tocmai l-am calculat şi relipim cele două bucăţi rămase, obţinem poliedrul (numit ,,acoperiş în patru ape") din figura de mai jos (notaţiile vârfurilor au fost schimbate).



Fie M şi N proiecţiile lui E pe AD, respectiv BC, iar Q şi P proiecţiile lui H pe AD, respectiv BC. Atunci $ENMHPQ$ este o prismă triunghiulară având drept baze triunghiurile isoscele EMN şi HQP şi înălţimea $EH = d$. În triunghiul isoscel EMN avem baza $MN = a - c$ şi înălţimea h, deci volumul prismei $ENMHPQ$ este $\dfrac{(a-c)h}{2} \cdot d$.



Dacă tăiem acoperişul în 4 ape după planele (EMN) şi (HPQ), îndepărtăm prisma $ENMHPQ$ şi relipim cele două poliedre rămase, obţinem o piramidă patrulateră în care baza este un dreptunghi de dimensiuni $a - c$ şi $b - d$, iar înălţimea este h. Volumul acesteia este aşadar $\dfrac{(a-c)(b-d)h}{3}$, deci volumul poliedrului iniţial este

$$\frac{(b+d)h}{2} \cdot c + \frac{(a-c)h}{2} \cdot d + \frac{(a-c)(b-d)h}{3} = \frac{\big(2(ab+cd) + (ad+bc)\big) \cdot h}{6}.$$

Problema 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Demonstraţi că $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3abc$ şi stabiliţi tripletele (a, b, c) de numere reale cu proprietatea $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ pentru care inegalitatea devine egalitate.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie:
Dacă $abc \leq 0$ inegalitatea este evidentă.
Dacă $abc > 0$, ea este echivalentă cu $(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)$ care se scrie $a^4(b^2 - c^2)^2 + b^4(c^2 - a^2)^2 + c^4(a^2 - b^2)^2 \geq 0$ care este adevărată.
Avem egalitate dacă $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ şi $abc > 0$ sau dacă două dintre variabile sunt 0, iar cea de-a treia $\pm\sqrt{3}$. Obţinem tripletele:
$(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0, \pm\sqrt{3})$.

Problema 3. Fie A şi B două puncte fixate în planul p. Aflaţi locul geometric al punctelor C din planul p cu proprietatea că înălţimea din B a triunghiului ABC are aceeaşi lungime ca şi latura $[AC]$.

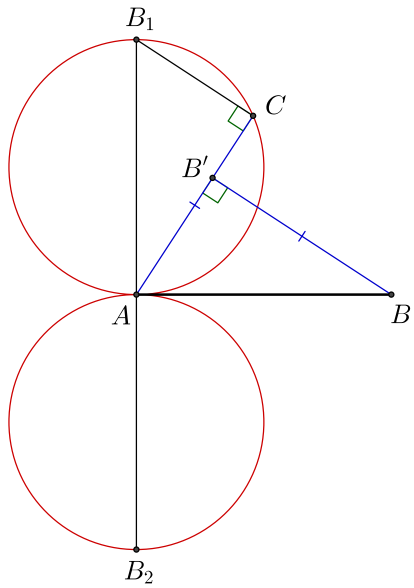
Viktor Prasolov – Problems in Plane and Solid Geometry, problema 7.24

Soluţie:
Fie B_1 şi B_2 pe perpendiculara în A pe AB astfel ca $AB_1 = AB_2 = AB$, $\mathscr{C}_1$ cercul de diametru $[AB_1]$ şi $\mathscr{C}_2$ cercul de diametru $[AB_2]$. Vom demonstra că locul geometric căutat este $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) \setminus \{A\}$.

Să arătăm mai întâi că orice punct al locului geometric aparţine reuninii celor două cercuri.
Dacă C este un punct al locului geometric situat în acelaşi semiplan determinat de AB ca şi B_1, vom demonstra că $C \in \mathscr{C}_1$. Fie B' piciorul înălţimii din B a triunghiului ABC. Triunghiurile ABB' şi B_1AC sunt congruente (LUL): $BB' = AC$ din ipoteză, $\angle B'BA \equiv \angle B_1AC$ (complementare cu $\angle B'AB$) şi $AB = AB_1$ din construcţie. Deducem că $m(\angle B_1CA) = m(\angle AB'B) = 90°$, deci $C \in \mathscr{C}_1$. Evident, $C \neq A$, deci $C \in (\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) \setminus \{A\}$.

Arătăm acum că orice punct din mulţimea $(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2) \setminus \{A\}$ aparţine locului geometric.

Fie $C \in \mathscr{C}_1 \setminus \{A\}$. Fie B' piciorul perpendicularei din B pe AC. Triunghiurile dreptunghice ABB' şi B_1AC sunt congruente (IU): $\angle B'BA \equiv \angle B_1AC$ (complementare cu $\angle B'AB$) şi $AB = AB_1$ din construcţie. Deducem că $BB' = AC$, deci C aparţine locului geometric.



Problema 4. Pătratele unitate ale unei table 2016×2016 se colorează cu roşu sau albastru astfel încât să fie îndeplinite următoarele două condiţii:
1. orice pătrat unitate roşu care nu este situat pe marginea tablei are exact 5 vecini

albaştri între cele 8 pătrate unitate cu care se învecinează (cu care are măcar un punct comun);
2. orice pătrat unitate albastru care nu este situat pe marginea tablei are exact 4 vecini roşii între cele 8 pătrate unitate cu care se învecinează.
Câte dintre pătratele unitate ale tablei sunt roşii?

Olimpiadă Cuba, 2012

Soluţie:
Împărţim tabla în pătrate 3×3. Ne uităm la pătratul unitate care se află în centrul unui asemenea pătrat 3×3. Dacă este roşu, atunci el are 5 vecini albaştri, deci în pătratul 3×3 vor fi, cu tot cu pătratul roşu din mijloc, 4 pătrate unitate roşii şi 5 albastre. Dacă pătratul unitate din mijloc este albastru, el are 4 vecini roşii, deci şi în acest caz pătratul 3×3 este constituit din 4 pătrate unitate roşii şi 5 albastre. În total sunt 672^2 pătrate 3×3 şi fiecare conţine 4 pătrate unitate roşii, deci în total sunt $4 \cdot 672^2 = 1344^2$ pătrate unitate roşii.

Remarcă: Există colorări care respectă condiţiile din enunţ. De exemplu, dacă numerotăm liniile şi coloanele de la 1 la 2016, putem colora cu albastru toate pătratele care au fie ambele coordonate divizibile cu 3, fie niciuna. O altă colorare: colorăm albastre toate pătrăţelele care au măcar una din coordonate divizibilă cu 3.