Problema 1. Determinaţi toate numerele reale k cu proprietatea că

$$0 \leq a + b - kab \leq 1$$

oricare ar fi $a, b \in [0, 1]$.

Olimpiadă Estonia, 2009

Soluţie:

• Dacă inegalitatea are loc pentru orice $a, b \in [0, 1]$, ea are loc în particular pentru $a = b = 1$, adică $0 \leq 2 - k \leq 1$, de unde $k \in [1, 2]$.

• Reciproc, arătăm că inegalitatea are loc pentru orice $k \in [1, 2]$.

Într-adevăr, dacă $a, b \in [0, 1]$, atunci $a^2 \leq a$, $b^2 \leq b$ şi $(1-a)(1-b) \geq 0$, inegalităţi care implică:

$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \leq a - b - 2ab \leq a + b - kab \leq a + b - ab \leq 1$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $(1-a)(1-b) \geq 0$.

În concluzie, valorile căutate ale lui k sunt toate cele din intervalul $[1, 2]$.

Problema 2. Pe o tablă sunt scrise, în ordine crescătoare, numerele naturale de la 1 la 100. Doi copii, Alina şi Bogdan, joacă următorul joc: pe rând, începând cu Alina, ei completează cele 99 de spaţii dintre oricare două numere consecutive cu semnele ,,+" sau ,,$\cdot$". Dacă la sfârşitul completării rezultatul obţinut este număr impar, câştigă Alina, în caz contrar câştigă Bogdan. Care din cei doi copii are strategie câştigătoare şi cum trebuie să joace el pentru a câştiga?

* * *

Soluţie:

Alina are strategie câştigătoare.

Ea poate juca astfel:

- începe prin a scrie ,,+" după primul număr, 1;
- în continuare, Bogdan face un semn în faţa sau în spatele unui număr impar (undeva între două numere consecutive, dintre care unul este, desigur, impar), atunci Alina face semnul ,,$\cdot$" în spatele, respectiv în faţa aceluiaşi număr impar.

Astfel, Alina se asigură că fiecare din numerele impare, cu excepţia lui 1, este înmulţit cu (cel puţin) unul din vecinii săi pari, deci termenul în care apare acest factor va fi par. Prin urmare, Alina asigură că rezultatul este 1+ o sumă de numere pare, deci impar.

Problema 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^3 - 3xy + y^3 = 3$.

prelucrare după *Lucian Tuţescu*, problema E:14699

Soluţie: Notând $x+y=s$ şi $xy=p$, avem $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=s(s^2-3p)$, deci ecuaţia revine la $s^3-3sp-3p=3$, de unde $3p(s+1)=s^3-3$. Cum $s=-1$ nu verifică, rezultă $3p=\dfrac{s^3-3}{s+1}=\dfrac{s^3+1-4}{s+1}=s^2-s+1-\dfrac{4}{s+1}$. Deoarece p trebuie să fie întreg, trebuie ca $s+1\mid 4$, adică $s+1\in D_4=\{-4,-2,-1,1,2,4\}$, de unde $s\in\{-5,-3,-2,0,1,3\}$. Pe de altă parte, trebuie ca $3\mid s^3-3$, adică $3\mid s$. Deducem că $s\in\{-3,0,3\}$. Corespunzător acestor valori se găseşte $p=5$, $p=-1$, respectiv $p=2$. Dar $s^2=(x+y)^2\geq 4xy=4p$ este o condiţie necesară pe care nu o respectă decât ultimele două perechi: $(s,p)=(0,-1)$ (care conduce la $\{x,y\}=\{-1,1\}$) şi $(s,p)=(3,2)$ (care conduce la $\{x,y\}=\{1,2\}$).

În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $(x,y)\in\{(-1,1),(1,-1),(1,2),(2,1)\}$.

Problema 4. Fie $\mathscr{C}$ un cerc de centru O şi rază R, fixat, şi C un punct exterior cercului. Fie A un punct mobil pe cercul $\mathscr{C}$, nesituat pe dreapta OC, B punctul diametral opus lui A, iar H ortocentrul triunghiului ABC. Se cere locul geometric al lui H.

pregătire lot Ungaria, 2012

Soluţie: Fie P proiecţia lui H pe CO. Vom arăta că acest punct este fix.
Din teorema medianei rezultă că $CO^2=\dfrac{2(CA^2+CB^2)-AB^2}{4}$, deci $CA^2+CB^2=2CO^2-\dfrac{AB^2}{2}$ este constantă (nu depinde de poziţia punctului C).
Arătăm că $PC^2-PO^2=HC^2-HO^2$ este constant.

$$PC^2-PO^2=HC^2-HO^2=\frac{CA'^2+A'H^2+CB'^2+B'H^2}{2}-$$

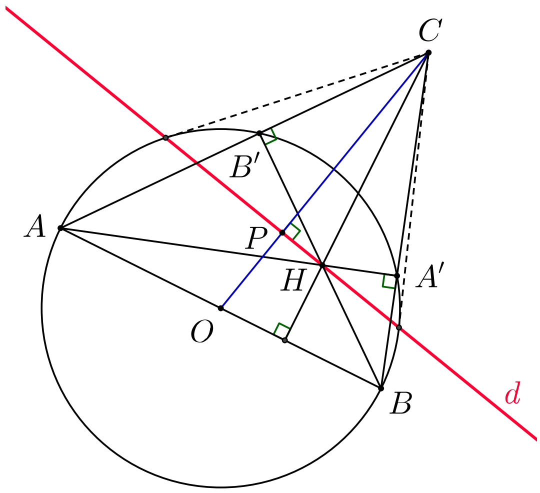
$$\frac{2(HA^2+HB^2)-AB^2}{4}=\frac{CA'^2+A'H^2+CB'^2+B'H^2}{2}-$$

$$\frac{2(HA'^2+A'B^2+HB'^2+B'A^2)-AB^2}{4}=\frac{CA'^2-BA'^2}{2}+\frac{CB'^2-AB'^2}{2}-\frac{AB^2}{4}=$$

$$\frac{CA^2-BA^2}{2}+\frac{CB^2-AB^2}{2}+\frac{AB^2}{4}=CO^2-2R^2,$$

adică o constantă.
Rezultă că $PC^2-PO^2=(PC-PO)(PC+PO)=CO(PC-PO)$ este constant, deci $PC-PO$ şi $PC+PO$ sunt constante, deci PC este constantă. Prin urmare P este punct fix şi locul geometric este inclus în perpendiculara în P pe CO, dreaptă pe care o vom nota în continuare cu d.

Reciproc, arătăm că orice punct al dreptei d aparţine locului geometric.
Dacă H este un punct al acestei drepte, din O ducem perpendiculara pe CH. Notăm cu A şi B intersecţiile acestei perpendiculare cu cercul. Conform celor de mai sus, ortocentrul, notat H', al triunghiului ABC aparţine dreptei d. Pe de altă parte, el aparţine şi perpendicularei din C pe AB. Prin urmare $H' = H$, deci H aparţine locului geometric.



Remarcă: Dacă AT_1 şi AT_2, cu T_1, $T_2 \in \mathscr{C}$ sunt tangentele din C la cerc, atunci $CT_1^2 - OT_1^2 = CO^2 - 2OT_1^2 = CO^2 - 2R^2$ şi analog pentru T_2, deci T_1, $T_2 \in d$. Aşadar $d = T_1T_2$, adică locul geometric este *polara* punctului C faţă de cerc.