Problema 1. Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$ sunt numere reale, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{bc(b+c)} + \frac{b^2}{ca(c+a)} + \frac{c^2}{ab(a+b)} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Vasile Peiţa

Soluţie:
Pentru demonstraţie se folosesc: inegalitatea lui Bergström:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \qquad \forall\, a, b, c, x, y, z > 0 \qquad (1)$$

dubla inegalitate

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \qquad (2)$$

care se demonstrează uşor (ambele inegalităţi revin la $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$) şi

$$abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27} \qquad (3)$$

care rezultă din inegalitatea mediilor.

Amplificând fracţiile cu a^2, b^2, respectiv c^2, obţinem:

$$\frac{a^2}{bc(b+c)} + \frac{b^2}{ca(c+a)} + \frac{c^2}{ab(a+b)} = \frac{a^4}{abc(ab+ac)} + \frac{b^4}{abc(bc+ba)} + \frac{c^4}{abc(ca+cb)} \overset{(1)}{\geq}$$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2abc(ab+bc+ca)} \overset{(2),(3)}{\geq} \frac{\frac{(a+b+c)^4}{9}}{2 \cdot \frac{(a+b+c)^3}{27} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{81(a+b+c)^4}{18(a+b+c)^5} =$$

$$\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Remarcă: Pare tentant să încercăm să aplicăm inegalitatea (1) direct:
Avem $\frac{a^2}{bc(b+c)} + \frac{b^2}{ca(c+a)} + \frac{c^2}{ab(a+b)} \overset{(1)}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b} \overset{?}{\geq} \frac{9}{2(a+b+c)}$, deci ar fi suficient să demonstrăm inegalitatea marcată cu „?”.
Aceasta revine la $2(a+b+c)^3 \geq 9(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$, care însă este falsă (de exemplu pentru $a = b = 1$, $c = 0,1$ ea revine la $18,522 \geq 19,98$, evident fals).

Soluţie alternativă („brute force"):
Se elimină numitorii şi, cu notaţiile clasice pentru sume Muirhead,

$$[\alpha, \beta, \gamma] = \sum_{cicl.} a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

inegalitatea din enunţ se rescrie echivalent:

$$[6,0,0] + 4[5,1,0] + 2[4,2,0] + 3[4,1,1] \geq 7[3,2,1] + 3[2,2,2],$$

care este imediat din inegalitatea lui Muirhead.

Problema 2. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat şi M, N, P, Q puncte coplanare astfel ca $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$.
Arătaţi că $MN \cdot NP \cdot PQ \cdot QM \geq AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ$.

Bencze Mihály, RMT nr. 2/2016

Soluţie:
În triunghiul MBN avem

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2\,MB \cdot BN \cos 60^\circ = MB^2 + BN^2 - MB \cdot BN \geq MB \cdot BN,$$

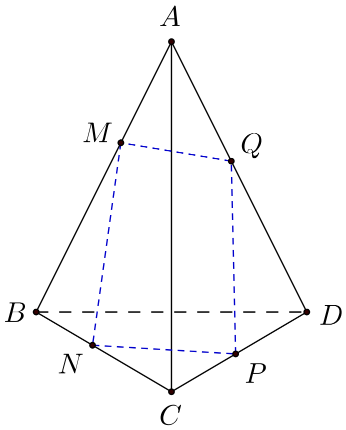
ultima inegalitate fiind echivalentă cu $(MB - BN)^2 \geq 0$.
Analog se arată $NP^2 \geq NC \cdot CP$, $PQ^2 \geq PD \cdot DQ$ şi $QM^2 \geq QA \cdot AM$.
Înmulţind aceste patru relaţii obţinem

$$MN^2 \cdot NP^2 \cdot PQ^2 \cdot QM^2 \geq MB \cdot BN \cdot NC \cdot CP \cdot PD \cdot DQ \cdot QA \cdot AM.$$

Dar, din teorema lui Menelaus în spaţiu,

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1,$$

de unde rezultă $AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ = MB \cdot NC \cdot PD \cdot QA$. Înlocuind în inegalitatea de mai sus, obţinem $MN^2 \cdot NP^2 \cdot PQ^2 \cdot QM^2 \geq (AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ)^2$, de unde rezultă concluzia.
Egalitate avem dacă $BM = BN = DP = DQ$ (şi deci $AM = AQ = CN = CP$).



Problema 3. Fie M mulţimea numerelor naturale care se scriu sub forma

$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$$

cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că $2016 \in M$.

b) Aflaţi cel mai mic număr natural care nu aparţine mulţimii M.

* * *

Soluţie:

a) Avem $2016 = 32 \cdot 63 = 2^5 \cdot (2^6 - 1) = 2^{11} - 2^5$, deci putem scrie, de exemplu, $2016 = \dfrac{2^{11} - 2^5}{2^1 - 2^0}$, ceea ce arată că $2016 \in M$.

b) Vom arăta că cel mai mic număr care nu aparţine mulţimii M este $n = 11$.

Evident, dacă un număr se scrie $k = \dfrac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$, atunci $2k = \dfrac{2^{a+1} - 2^{b+1}}{2^c - 2^d}$, deci $k \in M \Rightarrow 2k \in M$.

Se verifică uşor că $0, 1 \in M$. De aici rezultă succesiv că $2, 4, 8 \in M$.

Apoi $3 = \dfrac{2^2 - 2^0}{2^1 - 2^0}$, $5 = \dfrac{2^4 - 2^0}{2^2 - 2^0}$, $7 = \dfrac{2^3 - 2^0}{2^1 - 2^0}$, $9 = \dfrac{2^6 - 2^0}{2^3 - 2^0}$.

Folosind şi remarca de mai sus, rezultă că $3, 5, 7, 9, 6, 10 \in M$.

Prin urmare, toate numerele mai mici ca 11 sunt în M.

În continuare vom demonstra că $11 \notin M$.

Presupunând că există $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ astfel ca $11 = \dfrac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$, ar rezulta că $2^a - 2^b = 11(2^c - 2^d)$. Putem presupune că $a > b$. Atunci $c > d$ şi $11 = 2^{b-d} \cdot \dfrac{2^{a-b} - 1}{2^{c-d} - 1}$. Trebuie aşadar ca $b = d$ şi $11(2^x - 1) = 2^y - 1$, unde $x = c - d$, $y = a - b$ sunt numere naturale nenule. Ultima egalitate conduce la $11 \cdot 2^x - 2^y = 10$. Dacă $x, y \geq 2$, membrul stâng ar fi divizibil cu 4 pe când membrul drept nu este. Rezultă că $x = 1$ sau $y = 1$. Dacă $x = 1$ rezultă $2^y = 12$, imposibil, iar dacă $y = 1$, rezultă $11 \cdot 2^x = 12$, iarăşi imposibil. Prin urmare, 11 nu aparţine lui M şi este cel mai mic număr natural cu această proprietate.

Problema 4. O prismă se numeşte *binară* dacă i se pot eticheta vârfurile cu câte un număr din mulţimea $\{-1, 1\}$ astfel încât produsul etichetelor vârfurilor de pe fiecare faţă să fie -1.
Demonstraţi că o prismă este binară dacă şi numai dacă numărul de vârfuri ale prismei este divizibil cu 8.

Olimpiadă Cuba, 2007

Soluţie:
1. Vom arăta mai întâi că numărul de vârfuri ale unei prisme binare este multiplu de 8.

Ne uităm la muchiile verticale. Dacă una din muchiile verticale ale unei feţe uneşte două vârfuri etichetate la fel, atunci cealaltă muchie verticală a feţei trebuie să unească două vârfuri etichetate diferit şi reciproc. Astfel, muchiile verticale care unesc vârfuri etichetate la fel alternează cu muchii ce unesc vârfuri etichetate diferit, prin urmare trebuie să avem un număr par de muchii verticale. Prin urmare bazele sunt poligoane regulate cu un număr par de vârfuri. Dacă avem n muchii verticale de fiecare fel, atunci produsul tuturor etichetelor este pe de o parte $1^n \cdot (-1)^n$, pe de altă parte este egal cu produsul dintre produsul etichetelor de pe baza de sus şi produsul etichetelor de pe baza de jos, adică $(-1) \cdot (-1)$. Deducem că n este par şi, cum prisma are $4n$ vârfuri, numărul total de vârfuri ale unei prisme binare este multiplu de 8.

2. Vom arăta că orice prismă care are un număr de vârfuri care este divizibil cu 8 este binară.

Vom arăta cum se pot eticheta vârfurile astfel încât produsul etichetelor pe fiecare faţă să fie -1.
Să etichetăm deocamdată toate vârfurile feţei de sus cu 1, iar vârfurile feţei de jos alternativ, cu 1 şi -1. (Acest lucru este posibil pentru că poligonul de la bază are un număr par de vârfuri.) Acum să alegem o muchie verticală care are în ambele capete eticheta 1 şi să îi schimbăm etichetele în -1. Astfel produsul etichetelor de pe fiecare faţă verticală este -1, la fel şi pe faţa de sus. Pe faţa de jos, din cele $4n$ vârfuri, $2n + 1$ au eticheta -1, deci produsul etichetelor este iarăşi -1. Prin urmare am reuşit să etichetăm vârfurile astfel ca produsul etichetelor să fie -1 pe fiecare faţă, aşadar prisma este binară.