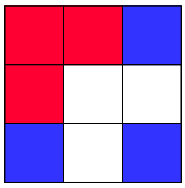
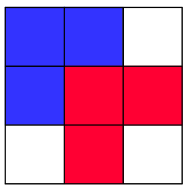
Problema 1. Avem la dispoziţie 27 de cuburi din lemn, de mărime egală, 9 roşii, 9 albastre şi 9 albe. Se poate forma cu aceste cuburi un cub $3 \times 3 \times 3$ cu proprietatea că orice rând (paralel cu vreo muchie a cubului) conţine trei cuburi care au exact două culori diferite?

S. Fomin, Leningrad (Turneul Oraşelor, 1989)

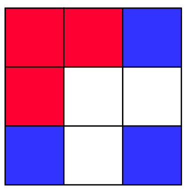
Soluţie:
Vom arăta că se pot plasa cuburile astfel încât ele să aibă un cub mai mare care să îndeplinească condiţiile problemei.
Vom considera cubul mare ca fiind aşezat pe o masă şi format din trei straturi: stratul de jos este format din 9 cuburi mici - cele care intră în contact cu masa - apoi stratul mijlociu format din alte 9 cuburi mici, cele care au câte o faţă comună cu cuburile din stratul de jos, şi, în fine, stratul de sus, format din alte 9 cuburi mici.
Cuburile din stratul de jos le aranjăm după următorul model:



Cuburile din stratul din mijloc le aranjăm astfel:



În fine, cuburile din stratul de sus le aranjăm la fel ca şi pe cele din stratul de jos:



Se verifică uşor că fiecare rând (paralelipiped cu dimensiunile 1, 1 şi 3) este format din 3 cuburi de lemn, două având o culoare, iar cel de-al treilea o altă culoare.

Problema 2. Fie a, b, c, d numere reale nenegative cu $a+b+c+d = 4$. Demonstraţi că
$$a^2 + b^3 + c^4 + d^5 \leq a^3 + b^4 + c^5 + d^6.$$

* * *

Soluţia 1:
Vom demonstra mai întâi că $x^{n+1} - x^n \geq x - 1$ pentru orice $x \geq 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, relaţia de mai sus este echivalentă cu $(x-1)(x^n-1) \geq 0$. Cele două paranteze au acelaşi semn. Egalitate avem dacă $x = 1$ şi $n \in \mathbb{N}$ arbitrar sau dacă $n = 0$ şi $x \geq 0$ arbitrar.
Avem aşadar inegalităţile: $a^3 - a^2 \geq a - 1$, $b^4 - b^3 \geq b - 1$, $c^5 - c^4 \geq c - 1$ şi $d^6 - d^5 \geq d - 1$ (cu egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c = d = 1$). Adunând aceste relaţii obţinem că $(a^3+b^4+c^5+d^6)-(a^2+b^3+c^4+d^5) \geq a+b+c+d-4 = 0$, adică $a^2 + b^3 + c^4 + d^5 \leq a^3 + b^4 + c^5 + d^6$.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = d = 1$.

Soluţia 2: (*Alexandru Gîrban*)
• Din inegalitatea mediilor avem: $2a^3+1 = a^3+a^3+1 \geq 3a^2$, $3b^4+1 = b^4+b^4+b^4+1 \geq 4b^3$, $4c^5+1 = c^5+c^5+c^5+c^5+1 \geq 5c^4$ şi $5d^6+1 = d^6+d^6+d^6+d^6+d^6+1 \geq 6d^5$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, respectiv $d = 1$.

Obţinem că $a^3 + b^4 + c^5 + d^6 \geq \dfrac{3a^2-1}{2} + \dfrac{4b^3-1}{3} + \dfrac{5c^4-1}{4} + \dfrac{6d^5-1}{5}$.

• Astfel, este suficient să demonstrăm că
$$\frac{3a^2-1}{2} + \frac{4b^3-1}{3} + \frac{5c^4-1}{4} + \frac{6d^5-1}{5} \geq a^2 + b^3 + c^4 + d^5,$$
adică $\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^3}{3} + \dfrac{c^4}{4} + \dfrac{d^5}{5} \geq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}$.

Adunând $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5}$ în ambii membri, această relaţie se mai scrie şi
$$\frac{a^2+1}{2} + \frac{b^3+2}{3} + \frac{c^4+3}{4} + \frac{d^5+4}{5} \geq 1+1+1+1.$$

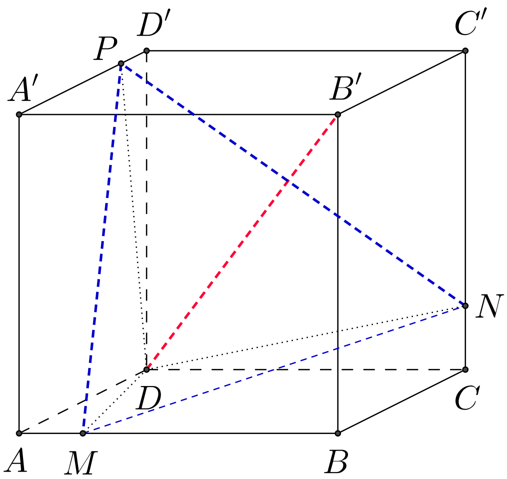
• Aplicând din nou inegalitatea mediilor, avem
$\dfrac{a^2+1}{2} \geq a$, $\dfrac{b^3+2}{3} = \dfrac{b^3+1+1}{3} \geq b$, $\dfrac{c^4+3}{4} = \dfrac{c^4+1+1+1}{4} \geq 4$ şi $\dfrac{d^5+4}{5} = \dfrac{d^5+1+1+1+1}{5} \geq d$ (cu egalitate dacă $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, respectiv $d = 1$)

care, adunate, dau $\dfrac{a^2+1}{2}+\dfrac{b^3+2}{3}+\dfrac{c^4+3}{4}+\dfrac{d^5+4}{5}\geq a+b+c+d=4$.
Egalitatea are loc pentru $a=b=c=d=1$.

Problema 3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(CC')$, $P\in(D'A')$ astfel încât $AM=CN=D'P$. Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe segmentul $[B'D]$.

Dan Brânzei, Concursul ,,Al. Myller", 2004

Fie G centrul de greutate al triunghiului MNP, ℓ lungimea muchiei cubului şi $AM=CN=D'P=x$. Deoarece $MA\perp(ADD'A')$, rezultă că $MA\perp AP$, deci $MP^2=MA^2+AP^2=MA^2+A'A^2+AP^2=x^2+\ell^2+(\ell-x)^2$. Analog se arată că $PN^2=x^2+\ell^2+(\ell-x)^2$ şi $NM^2=x^2+\ell^2+(\ell-x)^2$, deci triunghiul MNP este echilateral.
Din teorema lui Pitagora rezultă că $DM^2=DN^2=DP^2=\ell^2+x^2$, deci $DMNP$ este piramidă regulată. G fiind centrul bazei MNP, avem că $DG\perp(MNP)$. Analog se arată că $B'MNP$ este piramidă regulată, deci că $B'G\perp(MNP)$. Deducem că D,G,B' sunt coliniare (se află pe perpendiculara în G pe planul (MNP)), adică $G\in(DB')$.



Problema 4. a) Arătaţi că dacă n este un număr natural de forma $4k+1$, $k\in\mathbb{N}$, atunci există n numere naturale impare care au suma egală cu produsul.
b) Reciproc, arătaţi că dacă există n numere naturale impare $x_1,x_2,\ldots,x_n$ cu $x_1+x_2+\ldots+x_n=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$, atunci n este de forma $4k+1$ cu $k\in\mathbb{N}$.

M. Kontsevich, Moscova (Turneul Oraşelor, 1990)

Soluţie:
a) Dacă $n = 4k + 1$, putem, de exemplu, alege $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = 3$, $x_n = 2k + 1$. Produsul acestor numere este $6k + 3$, iar suma este $n - 2 + 3 + 2k + 1 = 6k + 3$, egală cu produsul. (Există şi alte exemple.)
b) Numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind impare, produsul lor este impar. Trebuie atunci ca şi suma lor să fie impară, deci trebuie să avem un număr impar de numere, adică n este impar.
Să presupunem că avem m numere care dau rest 3 la împărţirea cu 4 şi $n - m$ numere care dau restul 1 la împărţirea cu 4.
Suma numerelor va fi $m \cdot 3 + (n - m) \cdot 1$ modulo 4, adică $n + 2m \pmod 4$. Produsul numerelor este $(-1)^m \cdot 1^{n-m} = (-1)^m \pmod 4$, deci trebuie ca $n + 2m \equiv (-1)^m \pmod 4$. Dacă m este par, rezultă că $n \equiv 1 \pmod 4$, iar dacă m este impar rezultă $n + 2 \equiv -1 \pmod 4$, deci în ambele variante trebuie ca $n \equiv 1 \pmod 4$.