Problema 1. Arătaţi că dacă $a, b, c \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$, atunci

$$\frac{a^2+b^2}{6b-1}+\frac{b^2+2c^2}{6c-1}+\frac{c^2+3a^2}{6a-1} \geq 1.$$

Andrei Eckstein

Soluţia 1:

Avem că $\dfrac{x^2}{6x-1} \geq \dfrac{1}{9}$, pentru orice $x > \dfrac{1}{6}$.

Într-adevăr, relaţia se scrie echivalent $9x^2 \geq 6x-1$, adică $(3x-1)^2 \geq 0$, care este evidentă. Egalitate avem pentru $x = \dfrac{1}{3}$.

Folosind acest rezultat pentru a, b, c, putem scrie:

$$\frac{a^2+b^2}{6b-1}+\frac{b^2+2c^2}{6c-1}+\frac{c^2+3a^2}{6a-1} = \left(\frac{a^2}{6b-1}+\frac{b^2}{6c-1}+\frac{c^2}{6a-1}\right) +$$

$$\left(\frac{b^2}{6b-1}+2\cdot\frac{c^2}{6c-1}+3\cdot\frac{a^2}{6a-1}\right) \geq \left(\frac{a^2}{6b-1}+\frac{b^2}{6c-1}+\frac{c^2}{6a-1}\right)+\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}.$$

Astfel, rămâne să demonstrăm că $\dfrac{a^2}{6b-1}+\dfrac{b^2}{6c-1}+\dfrac{c^2}{6a-1} \geq \dfrac{1}{3}$.

Ori din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (vezi „Inegalitatea 1" din materialul teoretic), rezultă

$$\frac{a^2}{6b-1}+\frac{b^2}{6c-1}+\frac{c^2}{6a-1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6(a+b+c)-3} \geq \frac{1}{3}.$$

Notând cu $s = a+b+c$, ultima inegalitate este echivalentă cu $s^2 \geq 2s-1$, adică cu $(s-1)^2 \geq 0$.

Avem egalitate în inegalitatea de mai sus dacă şi numai dacă $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Soluţia 2:

Putem scrie $\dfrac{a^2+b^2}{6b-1}+\dfrac{b^2+2c^2}{6c-1}+\dfrac{c^2+3a^2}{6a-1} = \dfrac{a^2}{6b-1}+\dfrac{b^2}{6b-1}+\dfrac{b^2}{6c-1}+\dfrac{c^2}{6c-1}+$
$\dfrac{c^2}{6c-1}+\dfrac{c^2}{6a-1}+\dfrac{a^2}{6a-1}+\dfrac{a^2}{6a-1}+\dfrac{a^2}{6a-1}$.

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (vezi „Inegalitatea 1" din materialul teoretic) pentru aceşti 9 termeni, rezultă $\dfrac{a^2+b^2}{6b-1}+\dfrac{b^2+2c^2}{6c-1}+\dfrac{c^2+3a^2}{6a-1} \geq$
$\dfrac{(a+2b+3c+3a)^2}{2(6b-1)+3(6c-1)+4(6a-1)} = \dfrac{(4a+2b+3c)^2}{6(4a+2b+3c)-9} \geq 1.$

La ultima inegalitate s-a folosit pentru numărul $x = 4a+2b+3c$ faptul că
$\dfrac{x^2}{6x-9} \geq 1$ pentru orice $x > \dfrac{3}{2}$, adică $(x-3)^2 \geq 0$ pentru orice $x > \dfrac{3}{2}$.

Problema 2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 12$, $BC = 9$ şi $AA' = 4$. Determinaţi minimul sumei $MA+MB+MC+MD$, unde M este un punct variabil pe faţa $A'B'C'D'$.

Cosmin Niţu, Olimpiada de matematică 2013, Bucureşti, etapa pe sector

Soluţie:
Fie A'', B'', C'', D'' simetricele punctelor A, B, C, D faţă de A', B', C', D'.

În triunghiul MAA'', MA' este mediană si înalţime, deci triunghiul este isoscel.

Prin urmare, $MA = MA''$ şi, analog, $MB = MB''$, $MC = MC''$ şi $MD = MD''$.

Avem $MA+MB+MC+MD = \frac{1}{2}(MA+MB+MC+MD+MA''+MB''+MC''+MD'') = \frac{1}{2}[(MA + MC'') + (MB + MD'') + (MC + MA'') + (MD + MB'')]$.

Dar $MA + MC'' \geq AC''$, $MB + MD'' \geq BD''$, $MC + MA'' \geq CA''$, $MD + MB'' \geq DB''$, cu egalitate dacă $M \in [AC'']$, $M \in [BD'']$, $M \in [CA'']$, respectiv $M \in [DB'']$.

Deoarece $AC'' = BD'' = CA'' = DB'' = 17$, rezultă că $MA+MB+MC+MD \geq 34$.

Pe de altă parte, această valoare este atinsă pentru $M \in [AC''] \cap [BD''] \cap [CA''] \cap [DB''] = \{O'\}$, centrul feţei $A'B'C'D'$.

În concluzie valoarea minimă cerută este 34.

Problema 3. Determinaţi numărul minim n pentru care, oricum am colora în roşu n dintre vârfurile unui cub, există un triunghi echilateral cu vârfurile roşii.

Dan Schwarz, Baraj de juniori, 2015

Soluţia 1:
Vom demonstra că numărul căutat este 5.

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Colorând în roşu cele 4 vârfuri ale unei feţe a cubului, fie ele de exemplu A, B, C, D, nu se formează niciun triunghi echilateral cu vârfurile roşii, deci $n \geq 5$.

Acum, pentru $n = 5$, oricum am colora n vârfuri cu roşu, unul din planele $(ABCD)$ şi $(A'B'C'D')$ va avea cel puţin trei vârfuri roşii. Putem presupune că A, B, C sunt roşii.
Dacă şi D este roşu, atunci avem un singur vârf roşu în planul $(A'B'C'D')$. Dacă X' este vârful roşu, cu $X \in \{A, B, C, D\}$, atunci vecinii vârfului X formează un triunghi echilateral roşu.

Dacă D nu este roşu, atunci în planul $(A'B'C'D')$ avem două vârfuri roşii. Dacă B' sau D' este roşu, atunci ACB', respectiv ACD', este un triunghi echilateral cu vârfurile roşii. În caz contar, A' şi C' sunt roşii şi atunci $A'C'B$ este un triunghi echilateral cu vârfurile roşii.

În concluzie, oricum am colora 5 dintre vârfuri cu roşu, va exista cel puţin un triunghi echilateral cu vârfurile roşii, deci minimul căutat este $n = 5$.

Soluţia 2. (*Teodor Turu*)
Dacă colorăm cu roşu vârfuri ale unei singure feţe, nu se formează niciun echilateral cu vârfurile roşii, deci $n \geq 5$.
Vom demonstra că $n = 5$.
Avem două tetraedre regulate: $ACB'D'$ şi $BDA'C'$. Deoarece avem 5 vârfuri roşii şi două tetraedre, din principiul cutiei rezultă că unul dintre tetraedre va avea cel puţin 3 vârfuri roşii, iar acestea formează un triunghi echilateral.

Remarcă: Uşor reformulată, această problemă a fost problema 2 din cadrul Barajului 1 pentru determinarea echipei României la Balcaniada de Matematică pentru juniori din 2015.

Problema 4. Fie x un număr real pozitiv cu proprietatea că $x^5 - x^3 + x \geq 3$. Demonstraţi că $x^6 > 5$.

* * *

Soluţie: Deoarece $x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 = (x^2-1)^2 + x^2 \geq 0$ şi $x^2 + 1 \geq 2x$ (cu egalitate dacă $x = 1$), rezultă că

$$x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1^3 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1) \geq 2x(x^4 - x^2 + 1) = 2(x^5 - x^3 + x).$$

Folosind inegalitatea din enunţ obţinem $x^6 + 1 \geq 2 \cdot 3$, de unde $x^6 \geq 5$.

Nu putem avea egalitate pentru că ar trebui să avem simultan egalitate în inegalităţile $x^5 - x^3 + x \geq 3$ şi $x^2 + 1 \geq 2x$, ori în cea de-a doua avem egalitate pentru $x = 1$, în vreme ce pentru prima nu avem egalitate pentru $x = 1$.
Prin urmare, inegalitatea este strictă: $x^6 > 5$.

Remarcă: Se poate demonstra că expresia $x^5 - x^3 + x$ este crescătoare, adică dacă x creşte, creşte şi valoarea expresiei. Condiţia din enunţ este satisfăcută de numerele $x \in [x_0, \infty)$ unde $x_0 \simeq 1,31748$. Cea mai mică valoare posibilă a lui x^6 este atunci $x_0^6 \simeq 5,22954$.