Problema 1. Determinaţi perechile (x, y) de numere reale care satisfac simultan relaţiile:

$$x^3 = 17x + 8y, \quad y^3 = 8x + 17y.$$

* * *

Soluţie:
Adunând cele două ecuaţii obţinem $x^3+y^3 = 25(x+y)$, iar scăzând cele două relaţii obţinem $x^3-y^3 = 9(x-y)$. Am obţinut aşadar că $(x+y)(x^2-xy+y^2) = 25(x+y)$ şi $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 9(x-y)$.

Distingem trei cazuri: **I.** $x+y=0$; **II.** $x-y=0$; **III.** $x \neq \pm y$.

Cazul **I.** În acest caz, ecuaţiile din enunţ revin la $x^3 = 9x$, deci $x \in \{-3, 0, 3\}$. Obţinem soluţiile: $(x, y) \in \{(-3, 3), (0, 0), (3, -3)\}$.
Cazul **II.** În acest caz, ecuaţiile din enunţ revin la $x^3 = 25x$, deci $x \in \{-5, 0, 5\}$. Obţinem soluţiile: $(x, y) \in \{(-5, -5), (0, 0), (5, 5)\}$.
Cazul **III.** În acest caz putem împărţi ecuaţiile obţinute prin $x+y \neq 0$, respectiv $x-y \neq 0$ şi obţine $x^2-xy+y^2 = 25$, $x^2+xy+y^2 = 9$. Adunând aceste două relaţii şi apoi scăzându-le, obţinem $xy = -8$, $x^2+y^2 = 17$. De aici găsim că $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 1$ şi $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = 33$. Obţinem $x+y = \pm 1$ şi $x-y = \pm\sqrt{33}$. Aceste sisteme au patru soluţii: $(x, y) = \left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}, \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$, $(x, y) = \left(\frac{1+\sqrt{33}}{2}, \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)$, $(x, y) = \left(\frac{-1-\sqrt{33}}{2}, \frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right)$ şi $(x, y) = \left(\frac{-1+\sqrt{33}}{2}, \frac{-1-\sqrt{33}}{2}\right)$.

Toate aceste soluţii satisfac şi sistemul iniţial.

În concluzie, problema are 9 soluţii: $(-3, 3)$, $(0, 0)$, $(3, -3)$, $(-5, -5)$, $(5, 5)$, $\left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}, \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{33}}{2}, \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{2}, \frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{2}, \frac{-1-\sqrt{33}}{2}\right)$.

Problema 2. Determinaţi soluţiile întregi ale ecuaţiei $x^2+y^2+z^2 = x^2y^2$.

Olimpiadă SUA, 1976

Soluţie:
Pătratul unui număr par este divizibil cu 4, iar pătratul unui număr impar dă rest 1 la împărţirea cu 4.
• Dacă x este par atunci $x^2y^2 \equiv 0 \pmod 4$, deci $x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \pmod 4$ ceea

ce se poate numai dacă y, z sunt şi ele pare. Fie $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}$ astfel ca $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$. Rezultă că $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2y_1^2$. Cum membrul drept este divizibil cu 4, rezultă că şi x_1, y_1, z_1 sunt pare. Dacă $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, cu $x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}$, obţinem că $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 16x_2^2y_2^2$, deci x_2, y_2, z_2 sunt pare. Putem continua aceste procedeu la nesfârşit (putem descreşte la infinit numerele x^2, y^2, z^2) şi obţinem că x, y, z sunt divizibile cu orice putere a lui 2, deci ele sunt egale cu 0. Aşadar, în cazul x par, avem doar soluţia ,,banală" $x = y = z = 0$.

- Cazul în care y este par este analog.
- Dacă x şi y sunt impare, atunci ar trebui ca $1 + 1 + z^2 \equiv 1 \pmod 4$ ceea ce nu se poate.

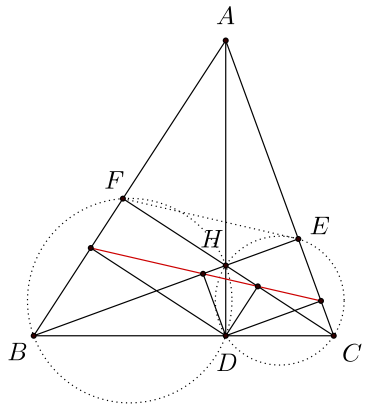
În concluzie, unica soluţie a ecuaţiei este $x = y = z = 0$.

Procedeul descris în rezolvare se numeşte *metoda descreşterii infinite.*

Problema 3. Fie ABC un triunghi şi D, E, F picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C. Arătaţi că proiecţiile lui D pe dreptele AB, BE, CF şi AC sunt coliniare.

Olimpiadă Marea Britanie, 2015-2016

Soluţia 1:
Afirmaţia este evidentă în cazul în care triunghiul este dreptunghic în B: în acest caz, $D = F = B$ şi proiecţiile lui D pe AB, CF şi BE coincid, deci coliniaritatea este evidentă. Analog în cazul în care unghiul C este drept. În celelalte cazuri, fie H ortocentrul triunghiului. Punctul D se află atât pe cercul de diametru $[BH]$, cât şi pe cel de diametru $[CH]$, adică pe cercurile circumscrise triunghiurilor BHF şi CHE. Conform teoremei ,,dreapta lui Simson", proiecţiile lui D pe laturile triunghiului BHF sunt coliniare şi, la fel, proiecţiile lui D pe laturile triunghiului CHE sunt coliniare. Rezultă că, pe de o parte proiecţiile lui D pe AB, CF şi BE sunt coliniare, pe de altă parte că proiecţiile lui D pe AC, CF şi BE sunt coliniare. În concluzie, cele patru proiecţii sunt coliniare.



Observaţie Din figura de mai sus se vede că dreapta (roşie) determinată de cele patru proiecţii ,,pare să fie" paralelă cu EF. Acest lucru se poate explica în felul următor: se ştie că simetricele unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi faţă de dreptele suport ale laturilor acestuia sunt coliniare. (Rezultă imediat din ,,dreapta lui Simson" şi teorema liniei mijlocii.) Ele formează *dreapta lui Steiner* a punctului. Dreapta lui Steiner trece prin ortocentrul triunghiului. Folosind acest rezultat, rezultă că simetricele lui D faţă de AB, BE şi CF se află pe o dreaptă care trece prin F, ortocentrul triunghiului (dreptunghic) BFH, iar simetricele lui D faţă de AC, BE şi CF se află pe o dreaptă care trece prin E, ortocentrul triunghiului CEH. Aşadar cele patru simetrice se află pe dreapta EF, deci dreapta determinată de cele patru proiecţii este paralelă cu EF.

Soluţia a doua se bazează tocmai pe observarea paralelismului de mai sus.

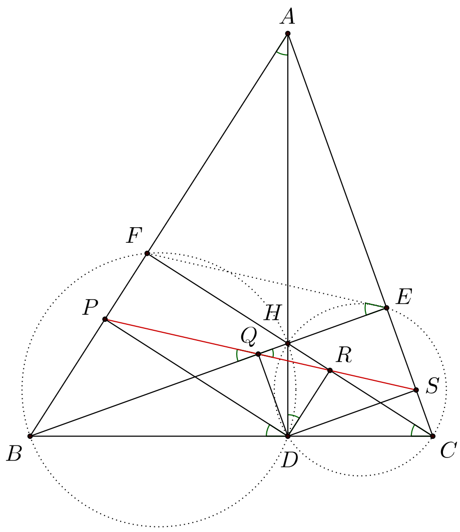
Soluţia 2:
Vom face demonstraţia numai în cazul triunghiului ascuţitunghic, în cazul obtuzunghic argumentele sunt similare.
Fie H ortocentrul triunghiului şi P, Q, R, S proiecţiile lui D pe AB, BE, CF, respectiv AC. Patrulaterele $BDQP$, $CDRS$ şi $BCEF$ sunt inscriptibile, deci

$$\widehat{PQB} \equiv \widehat{PDB} \stackrel{DP \parallel CF}{\equiv} \widehat{BCF} \equiv \widehat{BEF},$$

de unde rezultă că $PQ \parallel EF$. Analog rezultă că $RS \parallel EF$. Patrulaterele $HQDR$ şi $AFHE$ sunt inscriptibile, iar $DR \parallel AB$ (sunt ambele perpendiculare pe CF), deci

$$\widehat{HQR} \equiv \widehat{HDR} \stackrel{DR \parallel AB}{\equiv} \widehat{HAF} \equiv \widehat{HEF},$$

deci $QR \parallel EF$.
Din axioma paralelelor rezultă că punctele P, Q, R, S sunt coliniare.

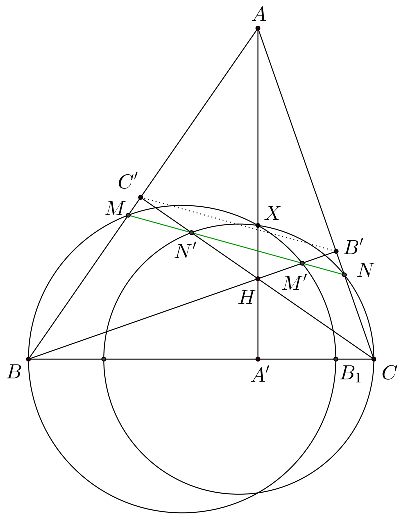


O frumoasă generalizare a acestei probleme a fost dată în 2014 la primul test de selecţie a echipei României pentru OIM:

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, fie A', B', C' proiecţiile ortogonale ale vârfurilor A, B, C pe dreptele BC, CA, respectiv AB, şi X un punct situat pe dreapta AA'. Fie γ_B cercul care trece prin punctele B şi X şi are centrul situat pe dreapta BC, iar γ_C cercul care trece prin punctele C şi X şi are centrul situat pe dreapta BC. Cercul γ_B intersectează a doua oară dreptele AB şi BB' în punctele M, respectiv M', iar cercul γ_C intersectează a doua oară dreptele AC şi CC' în punctele N, respectiv N'. Arătaţi că punctele M, M', N şi N' sunt coliniare.

Petru Braica

Soluţie: (oficială)
Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Dreapta AH este axa radicală a cercurilor γ_B şi γ_C, deci $HM' \cdot HB = HN' \cdot HC$ şi $AM \cdot AB = AN \cdot AC$, astfel că dreptele $M'N'$ şi MN sunt ambele antiparalele cu BC.
Cercul γ_B intersectează a doua oară dreapta BC în B_1. Atunci dreptele MM' şi BC sunt antiparalele fiindcă patrulaterul $BMM'B_1$ este inscriptibil. Concluzia este imediată.



Pentru $X = D$ ($X = A'$ în notaţiile problemei de la baraj) se obţine chiar problema dată la olimpiada din Marea Britanie. Aşa cum se vede din demonstraţia de mai sus, dreapta determinată de punctele M, M', N, N' este antiparalelă cu BC, adică paralelă cu EF ($B'C'$ în figura de mai sus). În enunţul dat împreună cu soluţia oficială s-a renunţat la ipoteza de triunghi ascuţitunghic.

Problema 4. Între membrii unui grup de nouă prieteni se trimit felicitări de Anul Nou, fiecare trimiţând câte o felicitare la un acelaşi număr, n, de prieteni din cadrul grupului.

a) Demonstraţi că dacă $n \geq 5$ atunci trebuie să existe doi prieteni care să se fi felicitat reciproc.

b) Demonstraţi că dacă $n \leq 4$ atunci este posibil să nu existe nicio pereche de prieteni care să se fi felicitat reciproc.

* * *

Soluţie: a) Sunt $\dfrac{9 \cdot 8}{2} = 36$ perechi de prieteni şi s-au trimis $9n \geq 45$ felicitări. Fiind mai multe felicitări decât perechi, în cadrul a cel puţin 9 perechi s-au trimis felicitări în ambele sensuri, deci există cel puţin nouă perechi de prieteni care s-au felicitat reciproc. Deci există doi prieteni care s-au felicitat reciproc.

b) Dacă aşezăm cei 9 prieteni pe un cerc şi fiecare trimite câte o felicitare la cele n persoane aşezate după ea pe cerc (în sensul acelor de ceasornic), cum $2n < 9$, nu vor exista prieteni care să se fi felicitat reciproc.