Problema 1. Determinaţi mulţimea numerelor naturale nenule n cu proprietatea că 100 se poate scrie sub forma $1 \pm 2 \pm ... \pm n$.

* * *

Soluţie:
Numărul $1 \pm 2 \pm ... \pm n$ are aceeaşi paritate ca şi $1 + 2 + ... + n$. Aşadar $\frac{n(n+1)}{2}$ trebuie să fie număr par, deci $n = 4k$ sau $n = 4k - 1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$.
Evident, $n \geq 14$ (pentru că $1 + 2 + \ldots + 13 = 91 < 100$).
Observăm că dacă n are proprietatea din enunţ, atunci şi $n+4$ o are deoarece dacă $100 = 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n$, atunci putem scrie şi $100 = 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n + (n+1) - (n+2) - (n+3) + (n+4)$.
Cu 16 termeni putem scrie $1+2+\ldots+16 = 136$, apoi schimbăm, de exemplu, semnele numerelor 2 şi 16 în „$-$". Cu 15 termeni, pornim de la $1+2+\ldots+15 = 120$, apoi schimbăm semnul lui 10. Am obţinut aşadar scriere cu $n = 15$ termeni (ceea ce implică existenţa unei scrieri pentru orice n de forma $4k - 1$, $n \geq 15$) şi cu $n = 16$ termeni (ceea ce implică existenţa unei scrieri pentru orice n de forma $4k$, $n \geq 16$).

Problema 2. Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere reale care satisfac simultan ecuaţiile:

$$ab + c = 6, \qquad bc + a = 6 \qquad \text{şi} \qquad ca + b = 6.$$

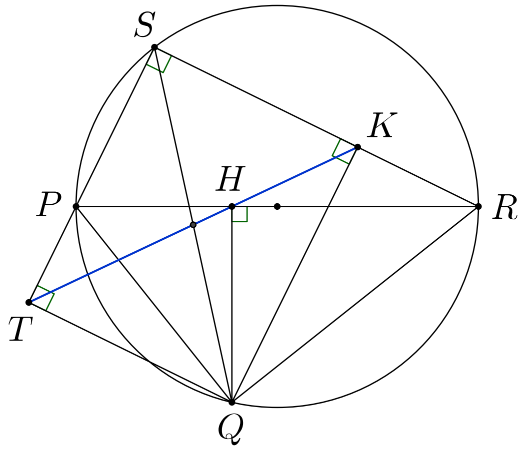
* * *

Soluţie: Scăzând prima ecuaţie din cea de-a doua, obţinem $b(c-a) - (c-a) = 0$, adică $(b-1)(c-a) = 0$.
• Dacă $b = 1$ atunci din celelalte două ecuaţii obţinem $a + c = 6$ şi $ac = 5$, adică $a(6-a) = 5$, sau $a^2 - a - 5a + 5 = 0$, care se scrie $(a-1)(a-5) = 0$. Obţinem soluţiile $(a, b, c) = (1, 1, 5)$ şi $(a, b, c) = (5, 1, 1)$.
• Dacă $a = c$, ca mai sus obţinem că $(a-1)(b-c) = 0$. Atunci fie $a = 1$ ($a = c = 1$ implică $b = 5$), şi obţinem soluţia $(a, b, c) = (1, 5, 1)$, fie $b = c$ şi atunci $a = b = c$. Revenind la una din ecuaţiile din enunţ obţinem $a^2 + a = 6$, adică $a^2 - 2a + 3a - 6 = 0$, sau $(a-2)(a+3) = 0$. Obţinem astfel soluţiile $a = b = c = -3$ şi $a = b = c = 2$.

Problema 3. În patrulaterul inscriptibil $PQRS$ în care $m(\angle PSR) = 90°$, H şi K sunt proiecţiile punctului Q pe dreptele PR, respectiv RS. Demonstraţi că dreapta HK trece prin mijlocul segmentului $[SQ]$.

Olimpiadă Hong Kong, 1998

Soluţie:
Fie T proiecţia lui Q pe PS. Deoarece Q se află pe cercul circumscris triunghiului PRS, proiecţiile lui Q pe laturile triunghiului PRS sunt coliniare (determină dreapta lui Simson a punctului Q), adică K, H şi T sunt coliniare. Patrulaterul $QKST$ are trei unghiuri drepte, deci este dreptunghi. Atunci diagonala $[KT]$ trece prin mijlocul celeilalte diagonale, $[SQ]$.



Remarcă: Se ştie că dreapta lui Simson a unui punct faţă de un triunghi trece prin mijlocul segmentului determinat de punct şi ortocentrul triunghiului. În cazul de faţă, S este ortocentrul triunghiului PRS, deci dreapta lui Simson, HK, trece prin mijlocul lui $[SQ]$.

Problema 4. Câte dintre numerele de nouă cifre au cifre nenule, distincte două câte două şi sunt divizibile cu 11?

* * *

Soluţie:
Căutăm numere de forma $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ cu $\{a_1, a_2, \ldots, a_9\} = \{1, 2, \ldots, 9\}$ şi care, conform criteriului de divizibilitate cu 11, satisfac condiţia că
$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) - (a_2 + a_4 + a_6 + a_8)$ să fie divizibil cu 11.
Notând $A = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ şi $B = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$, avem că $A + B = 1+2+\ldots+9 = 45$, deci A şi B au parităţi diferite. Avem $-30 = -9-8-7-6 < A - B < 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$ şi $A - B$ este multiplu impar de 11, deci $A - B \in \{-11, 11, 33\}$.
• Dacă $A - B = -11$ şi $A + B = 45$ atunci $A = 17$, $B = 28$. Singurele variante de a obţine $B = 28$ sunt cu $\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{4, 7, 8, 9\}$ şi $\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{5, 6, 8, 9\}$ (2 variante).
• Dacă $A - B = 11$ şi $A + B = 45$ atunci $A = 28$, $B = 17$. Singurele variante de a obţine $B = 17$ sunt cu $\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{1, 2, 5, 9\}$, $\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{1, 3, 4, 9\}$,
$\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{1, 2, 6, 8\}$, $\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{1, 3, 5, 8\}$,
$\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{2, 3, 4, 8\}$, $\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{1, 3, 6, 7\}$,
$\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{1, 4, 5, 7\}$, $\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{2, 3, 5, 7\}$ şi
$\{a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{2, 4, 5, 6\}$ (9 variante).
• Dacă $A - B = 33$ şi $A + B = 45$, atunci $B = 6$, ceea ce nu se poate

$(B \geq 1+2+3+4=10)$.
Aşadar avem 11 variante de a alege cifrele de pe locurile pare, respectiv impare. În fiecare variantă, putem permuta cele 4 cifre care apar pe locurile pare şi putem permuta cele 5 cifre care apar pe locurile impare. Obţinem astfel $4! \cdot 5! \cdot 11$ numere cu proprietate dorită.
(Odată alese mulţimile $X=\{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9\}$ şi $Y=\{a_2, a_4, a_6, a_8\}$ - şi sunt 11 moduri de a le alege - , putem alege cifra a_1 în 5 moduri, apoi cifra a_3 în 4 moduri, cifra a_5 în 3 moduri, cifra a_7 în două moduri şi cifra a_9 într-un singur mod. Cifra a_2 poate fi orice element al mulţimi Y, deci poate fi aleasă în 4 moduri, apoi cifra a_4 poate fi aleasă în 3 moduri, a_6 în două moduri, iar a_8 într-un singur mod. Aşadar pentru fiecare din cele 11 variante de X, Y sunt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=2880$ numere. În total, sunt $11 \cdot 2880=31680$ de numere.)