Problema 1. Fiecărui număr natural de patru cifre i se calculează rădăcina pătrată. Dacă rezultatul nu este număr natural, acesta se rotunjeşte la cel mai apropiat număr natural. Stabiliţi dacă s-au făcut mai multe rotunjiri în jos sau în sus.

Concursul KöMaL, Ungaria, noiembrie 2008, problema B. 4124.

Soluţie:
Pentru fiecare interval de forma $[n^2+1,\ n^2+2n]$ jumătate din numere se rotunjesc în sus, jumătate in jos. Într-adevăr, cum $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = n^2+n+\frac{1}{4}$, rădăcinile pătrate ale numerelor $n^2+1,\ n^2+2,\ \ldots,\ n^2+n$ se rotunjesc în jos (n numere), în vreme ce rădăcinile pătrate ale numerelor $n^2+n+1,\ n^2+n+2,\ \ldots,\ n^2+2n$ se rotunjesc în sus (tot n numere). Singurul asemenea interval care ,,nu încape în întregime" în mulţimea numerelor de patru cifre este $[962, 1023]$. Aici rădăcinile pătrate ale celor 24 de numere de 4 cifre se rotunjesc toate în sus.

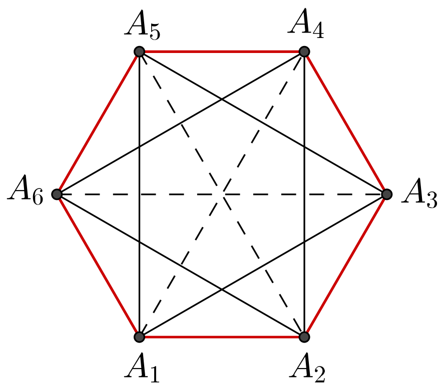
În concluzie, sunt mai multe rădăcini pătrate care se rotunjesc în sus decât rădăcini pătrate care se rotunjesc în jos.

Problema 2. Laturile unui hexagon $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ se vopsesc cu roşu, iar diagonalele cu roşu sau albastru. Câte colorări au proprietatea că fiecare triunghi $A_iA_jA_k$, $\{i,j,k\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$, are măcar o latură roşie?

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2011

Soluţie:
În afara triunghiurilor $A_1A_3A_5$ şi $A_2A_4A_6$, toate celelalte triunghiuri au drept latură măcar una laturile hexagonului, deci aceste triunghiuri au deja cel puţin o latură roşie. Pentru ca această condiţie să fie îndeplinită şi de triunghiurile $A_1A_3A_5$ şi $A_2A_4A_6$, trebuie să vopsim diagonalele A_1A_3, A_3A_5, A_5A_1 astfel încât cel puţin una din acestea să fie roşie şi la fel pentru diagonalele A_2A_4, A_4A_6, A_6A_2. Fiecare din diagonalele A_1A_3, A_3A_5, A_5A_1 poate fi colorată în două moduri, deci laturile triunghiului $A_1A_3A_5$ pot fi colorate în $2^3 = 8$ moduri. Dintre aceste colorări nu convine cea cu toate laturile albastre; aşadar diagonalele A_1A_3, A_3A_5, A_5A_1 pot fi colorate în 7 feluri. La fel pentru diagonalele A_2A_4, A_4A_6, A_6A_2. Rămân de colorat diagonalele A_1A_4, A_2A_5 şi A_3A_6. Nu există nicio restricţie asupra culorii acestora, deci culoarea fiecăreia poate fi aleasă în două moduri.

În final, avem $7^2 \cdot 2^3 = 392$ de colorări cu proprietatea din enunţ.



Problema 3. Colorăm fiecare număr natural nenul cu una din culorile roşu sau albastru. Se ştie că oricare două numere de culori diferite au suma un număr albastru, iar produsul un număr roşu. Ce culoare are produsul a două numere roşii? Dar suma a două numere roşii?

* * *

Soluţia 1:
Dacă toate numerele sunt colorate cu roşu atunci suma şi produsul oricăror două numere roşii sunt tot numere roşii.
Dacă există şi numere albastre, fie r_1, r_2 două numere roşii arbitrare, iar a un număr albastru. Atunci $(r_1 + a)r_2$ este produsul dintre numărul $r_1 + a$ (care este albastru) şi numărul roşu r_2, deci este număr roşu. Pe de altă parte, $(r_1 + a)r_2 = r_1r_2 + ar_2$ este suma dintre r_1r_2 şi numărul roşu ar_2. Dacă r_1r_2 ar fi albastru, atunci adunându-l cu numărul roşu ar_2 ar trebui să obţinem un număr albastru, ori ştim că $r_1r_2 + ar_2 = (r_1 + a)r_2$ este roşu. Prin urmare, produsul a două numere arbitrare roşii, r_1 şi r_2, trebuie să fie roşu.

Fie n este cel mai mic număr roşu. Din ipoteză şi din cele demonstrate mai sus rezultă că n, înmulţit cu orice alt număr, fie el roşu sau albastru, dă tot un număr roşu. Aşadar toţi multiplii lui n sunt roşii. Cum toate numerele mai mici decât n (dacă există) sunt albastre, un număr nedivizibil cu n se scrie $kn+r$, cu $0 < r < n$ număr albastru şi kn număr roşu, deci $kn + r$ este albastru. Prin urmare singurele colorări care au proprietatea din enunţ pot fi descrise astfel: multiplii celui mai mic număr roşu sunt tot roşii, celelalte numere sunt albastre. Atunci este evident că suma a două numere roşii este tot roşie deoarece suma a doi multipli de n este tot multiplu de n.

Soluţia 2: (*Paul Tîrlişan*)
Fie a şi b două numere roşii. Presupunem că ab este albastru. Atunci $b + ab = (a+1)b$ este albastru, deci $(a+1)b + b = (a+2)b$ este albastru, de unde rezultă că în general $(a+k)b$ este albastru oricare ar fi k natural. Pentru $k = a^2$ obţinem că $a(a+1)b$ este albastru. Cum $(a+1)b$ este albastru şi a este roşu, rezultă că $a(a+1)b$ este roşu, contradicţie. Deci ab este roşu.

Presupunem că $a+b$ este albastru. Atunci $(a+b)+a = 2a+b$ este albastru, deci $(2a+b)+a = 3a+b$ este albastru ş.a.m.d.; în general $ka+b$ este albastru oricare ar fi k natural nenul. Atunci, pentru un k fixat, avem că $(ka+b)+b = ka+2b$ este albastru, apoi $(ka+2b)+b = ka+3b$ este albastru şi în general $ka+pb$ este albastru, oricare ar fi k şi p naturale nenule. Pentru $k = p = a$ obţinem că $a(a+b)$ este albastru, dar din a roşu şi $a+b$ albastru rezultă $a(a+b)$ roşu, contradicţie.

Observaţia 1: Răspunsul poate fi uşor ghicit găsind o colorare particulară a numerelor care satisface condiţiile din enunţ. De exemplu, se pot colora numerele pare cu roşu, iar cele impare cu albastru. Însă a raţiona pe acest caz particular este greşit: în principiu este posibil să existe şi alte colorări decât aceasta. (Şi chiar există: dacă n este un număr natural nenul, putem colora cu roşu toate numerele divizibile cu n şi cu albastru cele care nu sunt divizibile cu n. Evident, suma dintre un număr divizibil cu n şi un număr care nu este divizibil cu n este un număr care nu este divizibil cu n, în vreme ce produsul unor asemenea numere va fi divizibil cu n; pentru $n = 1$ obţinem colorarea amintită la începutul soluţiei, anume cea în care toate numerele sunt colorate cu roşu. De fapt, aşa cum am demonstrat în Soluţia 1, acestea sunt singurele colorări posibile.)

Observaţia 2: Colorările de mai sus arată că nu putem stabili culoarea produsului sau a sumei a două numere albastre: suma a două numere nedivizibile cu n poate să fie sau să nu fie divizibilă cu n şi la fel şi produsul.

Întrebarea privind produsul a două numere roşii este problema B. 3652. din cadrul *Concursului KöMaL, Ungaria,* 2003.

Problema 4. Un cub de caşcaval $ABCDA'B'C'D'$ se taie cu un cuţit de-a lungul planelor $(ACC'A')$, $(ABC'D')$ şi $(AB'C'D)$. Câte bucăţi de caşcaval se formează?

* * *

Soluţie:
Cubul se secţionează după trei plane care conţin, fiecare, dreapta AC'. Spaţiul este împărţit de trei plane care trec printr-o dreaptă dată în şase părţi. Cum segmentul (AC') se află în interiorul cubului, fiecare din cele părţi va avea o porţiune comună cu cubul. Prin urmare se obţin şase bucăţi de caşcaval.