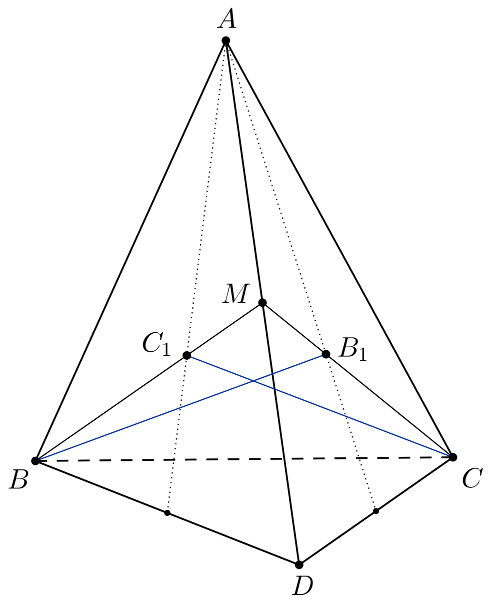
Problema 1. Trei dintre vârfurile tetraedrului $ABCD$ se proiectează în centrele de greutate ale feţelor opuse. Demonstraţi că tetraedrul este regulat.

Olimpiadă Rusia

Soluţie:
Să presupunem că punctele B, C şi D se proiectează pe feţele opuse în centrele de greutate ale acestor feţe. Fie M mijlocul lui $[DA]$, iar $[BB_1]$, $[CC_1]$ două dintre înălţimi. Din ipoteză, $B_1 \in CM$, $C_1 \in BM$, deci $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$, de unde $AD \perp (BMC)$. Rezultă că $AD \perp BM$, deci $[BM]$ este mediană şi înălţime în $\triangle ABD$, de unde $AB = BD$. Analog, din $\triangle ACD$, $AC = CD$. Considerând alte perechi de înălţimi, obţinem $AD = CD$, $AC = BC$, $AB = BC$ şi $AB = BD$. De aici rezultă că toate muchiile tetraedrului sunt egale.



Problema a fost dată şi la Concursul ,,Grigore Moisil" în 2010.

Problema 2. Determinaţi naturale nenule a şi b pentru care $(a + b^2)(b + a^2)$ este o putere a lui 2.

* * *

Soluţie:
Dacă $a = b$, atunci $a + a^2 = a(a + 1)$ trebuie să fie o putere a lui 2, deci şi a şi $a + 1$ trebuie să fie puteri ale lui 2. Acest lucru este posibil dacă şi numai dacă

$a = b = 1$, caz în care $(a + b^2)(b + a^2) = 2^2$ este într-adevăr putere a lui 2.

Dacă $a \neq b$, din motive de simetie putem presupune $a > b$. Cum $a + b^2$ şi $b + a^2$ trebuie să fie puteri ale lui 2, va rezulta că există $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a + b^2 = 2^x$ şi $b + a^2 = 2^y$. Scăzând prima relaţie din cea de-a doua, obţinem că $(a-b)(a+b-1) = 2^y - 2^x$. Membrul stâng fiind pozitiv, rezultă că $x < y$, deci

$$(a - b)(a + b - 1) = 2^x(2^{y-x} - 1) \qquad (*).$$

Cum $x \neq 0$, relaţia $a + b^2 = 2^x$ arată că a şi b au aceeaşi paritate, deci $a + b - 1$ este impar. Atunci din relaţia $(*)$ rezultă că $2^x \mid a - b$, adică $a + b^2 \mid a - b$ ceea ce nu se poate deoarece $0 < a - b < a + b^2$.

În concluzie, singurele numere naturale nenule cu proprietatea din enunţ sunt $a = b = 1$.

Problema 3. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, şi $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime cu cel puţin $k + 1$ elemente, având proprietatea că media aritmetică a oricăror k elemente distincte ale lui A este tot un element din A. Arătaţi că:
a) Mulţimea A este infinită.
b) Nu există mulţimi $A \subset \mathbb{Z}$ cu proprietatea de mai sus.
c) Există o infinitate de mulţimi $A \subset \mathbb{Q}$ cu proprietatea de mai sus.

Marius Ghergu

Soluţie:
a) Presupunem că mulţimea A ar fi finită. Atunci ar exista $d = \min\limits_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} |x - y|$.

Alegem $x, y \in A$ pentru care $|x - y| > 0$ şi este minimă.
(Dacă sunt mai multe asemenea perechi, luăm una dintre ele.)
În mulţimea A găsim $k - 1$ elemente diferite de x şi y.
Fie a_1, a_2, ..., $a_{k-1} \in A \setminus \{x, y\}$. Ne uităm la numerele

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + x}{k} \quad \text{şi} \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + y}{k}.$$

Din ipoteză, ambele numere aparţin mulţimii A. În plus, avem că

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + x}{k} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + y}{k} \right| = \left| \frac{x - y}{k} \right| = \frac{d}{k} < d,$$

ceea ce contrazice alegerea lui x şi y ca fiind cele mai apropiate două elemente din A. Aşadar, nu există mulţimi finite cu minim $k + 1$ elemente care să aibă proprietatea din enunţ.

b) Presupunem că ar exista o mulţime A de numere întregi cu proprietatea din enunţ. Putem proceda exact ca la a) sau, puţin altfel:
Fie $x, y \in A$, $x \neq y$. Alegem $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in A \setminus \{x, y\}$ şi deducem că

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + x}{k} \quad \text{şi} \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + y}{k}$$

aparţin lui A, deci sunt întregi. Atunci şi diferenţa lor, $\dfrac{x-y}{k}$, este întreagă, adică $k \mid x - y$, $\forall\, x, y \in A$. Deducem că, în particular,

$$\frac{x-y}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + x}{k} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + y}{k}$$

este divizibil cu k, adică $k^2 \mid x - y$, $\forall\, x, y \in A$. Continuând raţionamentul, obţinem că $k^n \mid x - y$, $\forall\, x, y \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ceea ce nu se poate.

c) Fie $a < b$ două numere reale arbitrare. Atunci $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ este o mulţime cu proprietăţile dorite: media aritmetică a unor numere raţionale este un număr raţional; dacă numerele sunt mai mari decât a, la fel este şi media lor aritmetică; dacă numerele sunt mai mici decât b, media lor aritmetică este, la fel, mai mică decât b. Cum intervalul (a, b) poate fi ales într-o infinitate de moduri, obţinem o infinitate de mulţimi de numere raţionale cu proprietatea dorită.

Bibliografie:

Marius Ghergu – *Probleme pentru pregătirea Olimpiadelor de Matematică*, clasele VI-VIII, Ed. GIL, Zalău, 2004, problema 44, pagina 26

Problema 4. Am introdus 100 de mingi în 100 de cutii şi nu am pus toate mingile într-o singură cutie (dar este posibil ca unele cutii să fi rămas goale). Demonstraţi că există un număr natural k, cu $1 \leq k < 100$, astfel încât să putem alege k cutii care să conţină, împreună, exact k mingi.

* * *

Soluţie:
Dacă avem o cutie care conţine o singură minge, problema este rezolvată: putem lua $k = 1$ şi alege respectiva cutie.
Dacă fiecare cutie este fie goală, fie conţine cel puţin două mingi, rezultă că există cel puţin 50 de cutii goale. Pe de altă parte, cum există cel puţin două cutii care primesc mingi, va exista o cutie care să conţină cel mult 50 de mingi. Putem lua k drept numărul mingilor dintr-o astfel de cutie, iar cele k cutii le putem alege astfel: cutia care conţine cele k mingi, plus $k - 1$ dintre cutiile goale. (Cum $k - 1 < 50$, dispunem de $k - 1$ cutii goale.) Aceste k cutii vor avea, împreună, exact k mingi.