Problema 1. Numerele nenegative a, b, c, d, e, f au suma 1. Arătaţi că

$$ab + cd + ef \leq \frac{1}{4}.$$

Când avem egalitate în inegalitatea de mai sus?

* * *

Soluţie:
Se verifică uşor prin desfacerea parantezelor că $ab+cd+ef \leq (a+c+e)(b+d+f)$. Apoi, folosind că $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ (din inegalitatea mediilor sau efectuând calculele şi ajungând la $(x-y)^2 \geq 0$), obţinem că $ab + cd + ef \leq (a + c + e)(b + d + f) \leq \left(\frac{(a+c+e)+(b+d+f)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
Egalitate avem dacă $a+c+e = b+d+f = \frac{1}{2}$ şi, în plus, $ad+af+cb+cf+eb+ed = 0$ (ca să avem egalitate şi în prima inegalitate). Pentru ca $a(d+f)+c(b+f)+e(b+d) = 0$, trebuie ca $a(d + f) = c(b + f) = e(b + d) = 0$. Nu putem avea două dintre numerele $d+f$, $b+f$ şi $b+d$ egale cu 0 pentru ca ar rezulta $b = d = f = 0$, contradicţie cu $b + d + f = \frac{1}{2}$. Nici $a = c = e = 0$ nu convine, prin urmare putem avea doar: $a = c = b = d = 0$, $e = f = \frac{1}{2}$; $a = e = b = f = 0$, $c = d = \frac{1}{2}$; sau $c = e = d = f = 0$, $a = b = \frac{1}{2}$.

Problema 2. Pentru un număr natural n, fie $S(n)$ suma cifrelor sale. Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale N care nu au ultima cifră 0 şi care verifică relaţia $S(N^2) = S(N)$.

G. Holló, Concursul KöMaL, martie 2008, problema B. 4072.

Soluţie:
Observăm că orice număr N de forma $N = 10^k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, satisface proprietatea cerută. Într-adevăr, ultima cifră a unui asemenea număr este 9 şi $S(N) = 9k$. În plus, $N^2 = 10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1 = \underbrace{99\ldots9}_{k-1 \text{ cifre}}8\underbrace{00\ldots0}_{k-1 \text{ cifre}}1$ are suma cifrelor $S(N^2) = 9(k-1) + 8 + 1 = 9k = S(N)$.

Problema 3. În fiecare pătrăţel unitate al unui pătrat 2015×2015 stă un cărăbuş. La un moment dat, fiecare cărăbuş se mută într-un pătrăţel vecin cu cel pe care se afla iniţial, adică într-un pătrăţel care are latură comună cu cel pe care stătea cărăbuşul la început. Arătaţi că există cel puţin un pătrăţel pe care nu se află niciun cărăbuş.

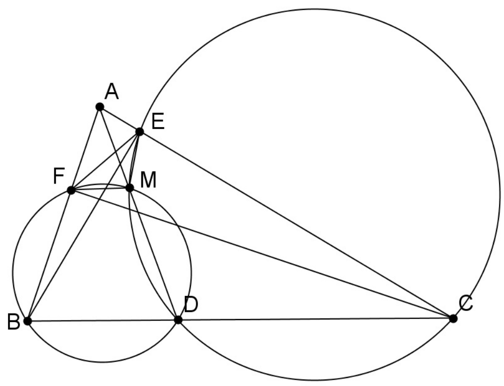
* * *

Soluţie:
Colorăm alternativ pătrăţelele unitate ale tablei cu alb şi negru, asemeni unei table de şah (dacă un pătrăţel are o anumită culoare, toate pătrăţelele vecine vor avea culoarea opusă.) Să presupunem că cele patru colţuri sunt negre. Este uşor de văzut că avem $\dfrac{2015^2-1}{2}$ pătrăţele albe şi $\dfrac{2015^2+1}{2}$ pătrăţele negre. Atunci când se mută, fiecare cărăbuş schimbă culoarea pătrăţelului pe care se află. Iniţial erau $\dfrac{2015^2-1}{2}$ cărăbuşi pe pătrăţelele albe. După ce aceştia se mută, ei vor ocupa cel mult $\dfrac{2015^2-1}{2}$ din cele $\dfrac{2015^2+1}{2}$ pătrăţele negre, prin urmare va rămâne cel puţin un pătrăţel (negru) pe care nu se va afla niciun cărăbuş.

Problema 4. În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB \neq AC$, D este piciorul bisectoarei interioare din A, iar E şi F sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Cercurile circumscrise triunghiurilor DBF şi DCE se taie a doua oară în M. Arătaţi că $ME = MF$.

Leonard Giugiuc, baraj de juniori, 2013

Soluţie:



Patrulaterul $BCEF$ este înscris în cercul de diametrul $[BC]$, deci $\angle AEF \equiv \angle ABC$. Atunci triunghiurile AEF şi ABC sunt asemenea, deci $AF \cdot AB = AE \cdot AC$, de unde rezultă că punctul A are putere egală faţă de cercurile circumscrise triunghiurilor DBF şi DCE, adică este pe axa radicală a celor două cercuri. Rezultă că $M \in AD$. Avem că $m(\angle EMF) = 360° - (180° - m(\angle FBD)) - (180° - m(\angle ECD)) = m(\angle B) + m(\angle C) = 180° - m(\angle A)$; deci patrulaterul $AEMF$ este inscriptibil. Astfel $\angle MEF \equiv \angle FAM$ şi $\angle MFE \equiv \angle EAM$, deci triunghiul MEF este isoscel cu $ME = MF$.