Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c pentru care

$$a^{bc} + b^{ca} + c^{ab} = 3abc.$$

* * *

Soluţie.
Dacă $a, b, c \geq 2$, atunci $a^{bc} + b^{ca} + c^{ab} \geq a^4 + b^4 + c^4 > a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ (din inegalitatea mediilor). Aşadar cel puţin unul dintre numere trebuie să fie 1.
Să presupunem că $c = 1$. Dacă $a, b \geq 3$, avem $a^{bc} + b^{ca} + c^{ab} \geq a^3 + b^3 + 1 > 2ab\sqrt{ab} > 3ab$, deci în acest caz nu avem soluţie.
Trebuie atunci ca unul dintre numerele a şi b să fie 1 sau 2. Dacă $b = 1$, ecuaţia din enunţ revine la $a + 2 = 3a$, deci $a = b = c = 1$ este o soluţie a ecuaţiei. Dacă $b = 2$, atunci ecuaţia revine la $a^2 + 2^a + 1 = 6a$. Rezultă $a^2 < 6a$, deci $a < 6$. Verificând valorile rămase, constatăm că numai $a = 3$ convine. Aşadar soluţiile ecuaţiei sunt $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ şi $(3, 2, 1)$.

Problema 2. Fie x şi y două numere reale.
a) Este adevărat că dacă $x + y$ şi $x + y^2$ sunt raţionale atunci neapărat x şi y sunt raţionale?
b) Este adevărat că dacă $x + y$, $x + y^2$ şi $x + y^3$ sunt raţionale atunci neapărat x şi y sunt raţionale?

Olimpiadă Estonia, 2008

Soluţie.
a) Nu este obligatoriu ca x şi y să fie raţionale. Prin scăderea celor două numere este clar că $y^2 - y$ trebuie să fie raţional. Acest lucru este însă posibil şi fără ca y să fie raţional. Să alegem, de exemplu, y astfel încât $y^2 - y = 1$. Ultima relaţie revine la $4y^2 - 4y = 4$, adică la $4y^2 - 4y + 1 = 5$, deci la $(2y - 1)^2 = 5$. Putem alege y astfel ca $2y - 1 = \sqrt{5}$ care este iraţional, deci şi $y = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$ este iraţional.
Alegând, de exemplu, $x = -y$, este clar că $x + y = 0 \in \mathbb{Q}$ şi $x + y^2 = y^2 - y = 1 \in \mathbb{Q}$.

b) Dacă $x + y$, $x + y^2$ şi $x + y^3$ sunt raţionale atunci diferenţele $y^2 - y$ şi $y^3 - y^2$ sunt şi ele raţionale. Dacă $y^2 - y = 0$, atunci $y \in \{0, 1\} \subset \mathbb{Q}$, deci y este raţional. Din $x + y \in \mathbb{Q}$ rezultă atunci că şi $x \in \mathbb{Q}$.
Dacă $y^2 - y \neq 0$, atunci obţinem că $\dfrac{y^3 - y^2}{y^2 - y} = y$ este raţional. Din nou, folosind că $x + y \in \mathbb{Q}$, obţinem că şi x raţional.

Problema 3. Fie ABC un triunghi, $\mathscr{C}$ un cerc care trece prin punctele B şi C şi d o dreaptă care intersectează laturile (AB) şi (AC) în punctele K, respectiv L, şi cercul $\mathscr{C}$ în punctele P şi Q. Paralela prin K la AC intersectează $[BC]$ în S, iar paralela prin L la AB intersectează $[BC]$ în T. Arătaţi că punctele P, Q, S şi T sunt conciclice.

Mihai Miculiţa

Soluţie:
Dacă $d \parallel BC$, atunci $BKLT$ şi $CLKS$ sunt paralelograme, deci triunghiurile BKS şi TLC sunt congruente (LUL), deci segmentele $[BC]$ şi $[ST]$ au acelaşi mijloc. Cum B, C, P şi Q sunt vârfurile unui trapez inscriptibil (adică isoscel), mediatoarele bazelor coincid, deci şi mediatoarele segmentelor $[PQ]$ şi $[ST]$ coincid, adică P, Q, S şi T sunt vârfurile unui trapez isoscel, deci conciclice.

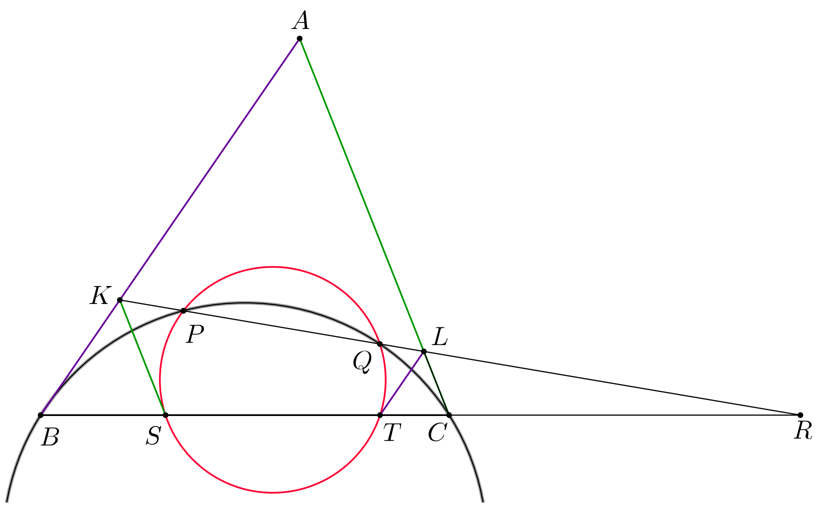
Dacă d nu este paralelă cu BC, notând cu $\{R\} = KL \cap BC$, avem:

$$B, C, P, Q \text{ - conciclice} \Rightarrow RB \cdot RC = RP \cdot RQ \qquad (1).$$

Pe de altă parte, pe baza teoremei lui Thales, din

$$\left.\begin{array}{l} KS \parallel AC \Rightarrow \dfrac{RC}{RS} = \dfrac{RL}{RK} \\ LT \parallel AB \Rightarrow \dfrac{RT}{RB} = \dfrac{RL}{RK} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{RC}{RS} = \frac{RT}{RB} \Leftrightarrow RS \cdot RT = RB \cdot RC \qquad (2).$$

În fine, din relaţiile (1) şi (2), obţinem că $RP \cdot RQ = RS \cdot RT$ şi, cum R este pe prelungirile segmentelor $[ST]$ şi $[PQ]$, din reciproca teoremei puterii punctului rezultă că punctele P, Q, S şi T sunt conciclice.



Problema 4. Numerele $1, 2, \ldots, 2016$ sunt scrise pe tablă, într-o anumită ordine, fiecare din ele exact o dată. Între oricare două numere vecine pe tablă se scrie modulul diferenţei dintre cele două numere, pe tablă fiind scrise astfel 2015 numere noi. Se şterg de pe tablă cele 2016 numere iniţiale, după care procesul se reia pentru cele 2015 numere rămase pe tablă: se scriu modulele diferenţelor de câte două numere vecine, după care cele 2015 numere scrise pe tablă la etapa anterioară se şterg. Procesul se repetă până când, la sfârşit, pe tablă rămâne un singur număr. Care este cea mai mare valoare posibilă pe care o poate avea numărul rămas pe tablă?

* * *

Soluţie: Valoarea celui mai mare număr scris pe tablă nu poate creşte de la o etapă la alta. Mai mult, după prima etapă, cel mai mare număr rămas pe tablă va fi cel mult 2015 (şi asta dacă 1 şi 2016 sunt vecine pe tablă). După prima etapă, cel mai mare număr scris pe tablă este aşadar cel nult 2015, iar cel mai mic este cel puţin 1, deci după etapa a doua cel mai mare număr de pe tablă este cel mult 2014. Prin urmare, numărul final este cel mult 2014.

Pe de altă parte, dacă ordinea iniţială a numerelor este $2016, 1, 2, 3, \ldots, 2015$, după prima etapă vor rămâne pe tablă numerele $2015, 1, 1, 1, \ldots, 1$, iar după etapa a doua vor rămâne $2014, 0, 0, 0, \ldots 0$. De aici înainte, numerele de pe tablă vor fi 2014 urmat de tot mai puţine cifre de 0, până când la sfârşit rămâne 2014.

Am demonstrat aşadar că cea mai mare valoare posibilă a numărului care rămâne pe tablă este 2014.