Problema 1. Determinaţi numerele întregi a, b pentru care $a^2 + b^2 = a^3 + b^3$.

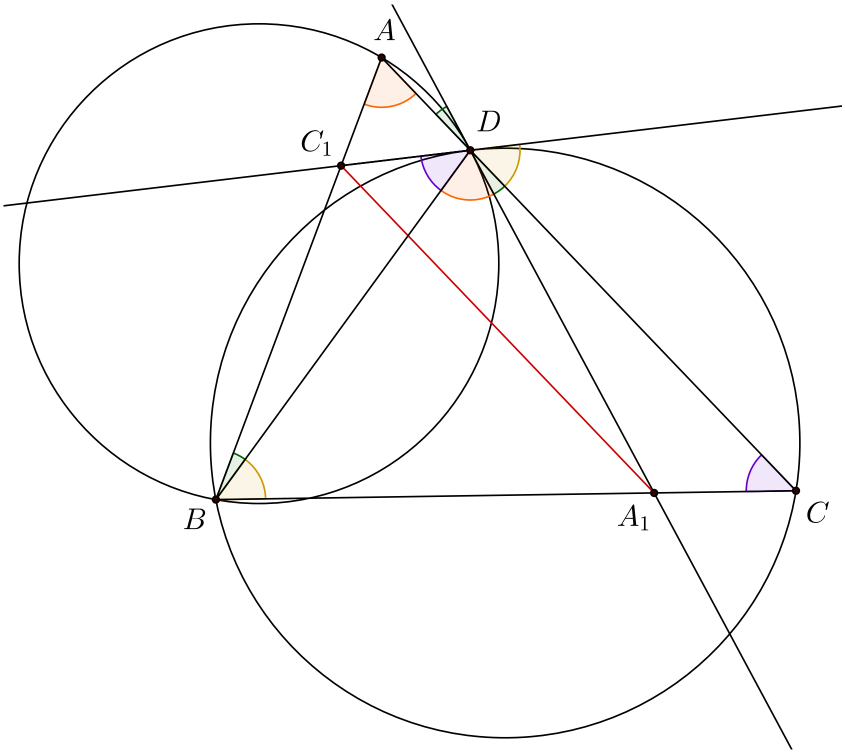
* * *

Soluţie:
Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, atunci $a^2 \leq a^3$ şi $b^2 \leq b^3$, deci $a^2 + b^2 \leq a^3 + b^3$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a, b \in \{0, 1\}$.
Obţinem aşadar soluţiile $(a, b) \in \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$.
Dacă $a, b < 0$ nu avem soluţie deoarece $a^2 + b^2 > 0 > a^3 + b^3$.
În fine, dacă $a < 0 \leq b$ (cazul $b < 0 \leq a$ este analog), atunci notând $c = -a \in \mathbb{N}^*$, avem de rezolvat în numere naturale ecuaţia $b^2 + c^2 = b^3 - c^3$. Trebuie aşadar ca $b > c$, adică $b - c \geq 1$. Atunci $b^3 - c^3 = (b-c)(b^2 + bc + c^2) \geq b^2 + bc + c^2 \geq b^2 + c^2$, cu egalitate dacă $bc = 0$ şi $b - c = 1$, ceea ce nu se poate căci $b > c \geq 1$.
În concluzie, singurele soluţii sunt $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ şi $(1, 1)$.

Problema 2. Pe latura (AC) a triunghiului ABC se consideră un punct arbitrar D. Tangenta în D la cercul circumscris triunghiului BDC intersectează AB în punctul C_1, iar tangenta în D la cercul circumscris triunghiului ABD intersectează BC în punctul A_1. Arătaţi că $A_1C_1 \parallel AC$.

Olimpiada de geometrie „Sharygin", Rusia, 2012, runda 1, problema 5

Soluţie:
Avem $\angle C_1DB \equiv \angle C$, deci $\angle C_1DA \equiv \angle CBD$. Analog, $\angle CDA_1 \equiv \angle ABD$. Dar $m(\angle ADC) = 180$, deci BA_1DC_1 este inscriptibil. De aici rezultă că $\angle BC_1A_1 \equiv \angle A$ şi concluzia.



Problema 3. Fiecare din pătrăţelele unitate ale unei table 8×8 se colorează cu câte o culoare astfel încât fiecare pătrăţel unitate să aibă cel puţin doi vecini care au aceeaşi culoare ca şi el. (Un vecin al unui pătrăţel este un pătrăţel cu care acesta are latură comună.) Care este numărul maxim posibil de culori folosite?

* * *

Soluţie:
Răspunsul este 16.
Din fiecare culoare trebuie să avem cel puţin 4 pătrăţele, deci putem avea cel mult $64 : 4 = 16$ culori.
Pe de altă parte, tabla se poate pava cu 16 dale pătrate 2×2 monocolore, fiecare dală având o altă culoare.

Problema 4. Fiecare din numerele a_1, a_2, ..., a_{2n+1} este un element al mulţimii $\{2015, 2016, 2017\}$. Se ştie că $a_1 \neq a_2$, $a_2 \neq a_3$, ..., $a_{2n} \neq a_{2n+1}$ şi că $a_1 = a_{2n+1}$. Arătaţi că $a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - a_4a_5 + \ldots - a_{2n}a_{2n+1} = 0$.

* * *

Soluţia 1.
Scriem numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, în ordine, pe un cerc şi considerăm că a_{2n+1} coincide cu a_1. Acum nu avem două numere consecutive pe cerc care să fie egale. Dacă

pe cerc există un grup format din trei numere consecutive, a_k, a_{k+1}, a_{k+2} (indicii sunt luaţi modulo $2n$) astfel încât $a_k = a_{k+2}$, ştergem numerele a_{k+1} şi a_{k+2} de pe cerc. Pe cerc vom avea tot un număr par de numere, nicicare două vecine egale, iar suma alternantă de la sfârşit nu se modică prin această ştergere. Continuăm acest proces de ştergere până când nu mai există pe cerc grupuri de forma x, y, x. În acest moment fie nu mai avem deloc numere pe cerc (şi atunci suma cerută este 0), fie avem numai grupuri de forma x, y, z care se repetă: $x, y, z, x, y, z, x, y, z,$ ş.a.m.d., unde $\{x, y, z\} = \{2015,\ 2016,\ 2017\}$. Cum numărul numerelor de pe cerc rămâne mereu par, vom rămâne cu un număr par de grupe x, y, z. Putem atunci grupa numerele rămase în succesiuni x, y, z, x, y, z. În fiecare astfel de succesiune, suma căutată este $xy - yz + zx - xy + yz - zx = 0$, deci suma finală va fi 0. Prin urmare şi la început, suma căutată a fost 0.

Soluţia 2. (*Călin Nicolae Modoran*)
Rescriem relaţia din enunţ sub forma

$$(a_1-a_2)^2+(a_3-a_4)^2+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n})^2 = (a_2-a_3)^2+(a_4-a_5)^2+\ldots+(a_{2n}-a_1).$$

Diferenţa dintre oricare două numere poate fi ±1 sau ±2, deci $(a_k-a_{k+1})^2 \in \{1,4\}$, $\forall\, k = \overline{1,2n}$. Mai precis, $(a_k - a_{k+1})^2 = 4$ dacă $\{a_k, a_{k+1}\} = \{2015, 2017\}$ şi $(a_k - a_{k+1})^2 = 1$ dacă $2016 \in \{a_k, a_{k+1}\}$. Dacă r dintre cele $2n$ numere sunt egale cu 2016, atunci în fiecare membru al egalităţii $(a_1-a_2)^2+(a_3-a_4)^2+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n})^2 = (a_2-a_3)^2+(a_4-a_5)^2+\ldots+(a_{2n}-a_1)$ sunt r termeni egali cu 1 şi $n-r$ termeni egali cu 4, deci cele două sume sunt egale.