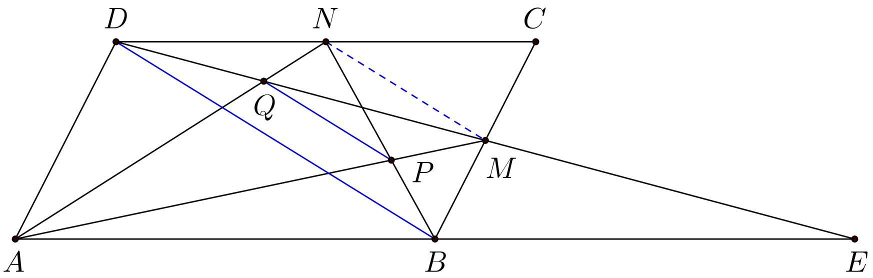
Problema 1. Fie M şi N mijloacele laturilor $[BC]$, respectiv $[CD]$, ale paralelogramului $ABCD$, $\{P\} = AM \cap BN$ şi $\{Q\} = AN \cap DM$. Demonstraţi că segmentele $[PQ]$ şi $[BD]$ sunt paralele şi aflaţi raportul dintre lungimile lor.

* * *

Soluţie:
Fie E punctul de intersecţie a dreptelor AB şi DM. Triunghiurile CDM şi BEM sunt congruente (ULU), deci $BE = CD = AB$. Triunghiurile DNQ şi EAQ sunt asemenea, deci $\dfrac{AQ}{QN} = \dfrac{AE}{DN} = 4$. Analog se arată că $\dfrac{AP}{PM} = 4$, deci, din reciproca teoremei lui Thales, $PQ \parallel MN$. Dar MN este linie mijlocie în triunghiul BCD, deci $MN \parallel BD$. Conchidem că $PQ \parallel BD$.

În plus, $\dfrac{PQ}{MN} = \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{4}{5}$ şi, cum $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{1}{2}$, rezultă că $\dfrac{PQ}{BD} = \dfrac{2}{5}$.



Problema 2. Determinaţi numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ care verifică simultan relaţiile

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016} \geq 2016.$$

şi

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2016}^3 \geq x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2016}^4.$$

* * *

Soluţie:
Adunăm cele două relaţii şi rescriem inegalitatea obţinută astfel:

$$(x_1^3 - x_1^4 + x_1 - 1) + (x_2^3 - x_2^4 + x_2 - 1) + \ldots + (x_{2016}^3 - x_{2016}^4 + x_{2016} - 1) \geq 0,$$

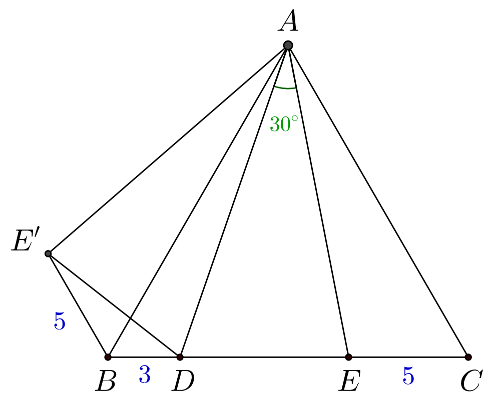
adică $(x_1^3 - 1)(1 - x_1) + (x_2^3 - 1)(1 - x_2) + \ldots + (x_{2016}^3 - 1)(1 - x_{2016}) \geq 0$.
În fiecare termen, cei doi factori au semne contrare, deci $(x_k^3 - 1)(1 - x_k) \leq 0$,

$\forall\, k = \overline{1, 2016}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x_k = 1$.
Suma a 2016 termeni ≤ 0 dă un rezultat ≥ 0, lucru posibil dacă şi numai dacă toţi termenii sunt 0, adică pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2016} = 1$, numere care verifică într-adevăr relaţiile din enunţ.

Problema 3. Pe latura $[BC]$ a triunghiului echilateral ABC se consideră punctele D şi E astfel încât $BD = 3\,\text{cm}$, $CE = 5\,\text{cm}$ şi $D \in (BE)$. Ştiind că $m(\angle DAE) = 30°$, aflaţi lungimea segmentului $[DE]$.

* * *

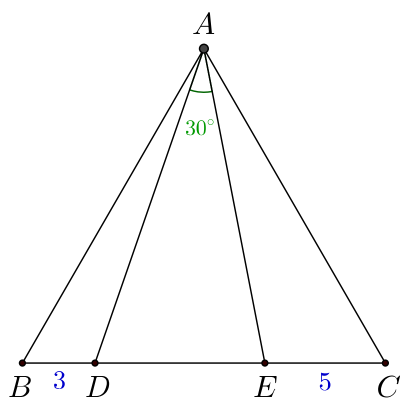
Soluţia 1:
Pe latura $[AB]$, în exteriorul triunghiului ABC, construim un triunghi ABE' congruent cu triunghiul ACE („rotim" triunghiul ACE cu $60°$ în jurul lui A).
Atunci $m(\angle E'AD) = m(\angle E'AB) + m(\angle BAD) = m(\angle EAC) + m(\angle BAD) = m(\angle BAC) - m(\angle DAE) = 60° - 30° = 30°$.
Rezultă că triunghiurile $E'AD$ şi EAD sunt congruente LUL deoarece:
$AE' = AE$, $m(\angle E'AD) = 30° = m(\angle EAD)$ şi $AD = AD$. Aşadar $DE' = DE$.
În triunghiul DBE' avem: $BD = 3\,\text{cm}$, $BE' = 5\,\text{cm}$, $m(\angle DBE') = 120°$, deci din teorema lui Pitagora generalizată (proiecţia lui $[BE']$ pe BD cade în afară şi are lungimea $BE' \cdot \cos 60°$) rezultă că $DE'^2 = BD^2 + BE'^2 + 2BD \cdot BE' \cdot \cos 60° = 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 49\ (\text{cm}^2)$, deci $DE = DE' = 7\,\text{cm}$.



Soluţia 2: (schiţă)
Notând cu a lungimea laturii triunghiului ABC şi aplicând teorema generalizată a lui Pitagora în triunghiurile ABD, ACE şi DAE, obţinem:

$$AD^2 = a^2 + 9 - 3a, \qquad AE^2 = a^2 + 25 - 5a$$

şi
$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos 30°,$$
de unde, cum $DE = a - 8$, obţinem ecuaţia
$$(a-8)^2 = a^2 + 9 - 3a + a^2 + 25 - 5a - \sqrt{3(a^2+9-3a)(a^2+25-5a)}.$$
Această ecuaţie revine la $a^2 + 8a - 30 = \sqrt{3(a^2+9-3a)(a^2+25-5a)}$ şi, prin ridicare la pătrat, după calcule, la $2a^4 - 40a^3 + 143a^2 + 120a - 225 = 0$. Dar $2a^4 - 40a^3 + 143a^2 + 120a - 225 = (a-1)(a-15)(2a^2 - 8a - 15)$ şi, cum $a > 8$ implică $2a^2 - 8a - 15 = a(a-8) + (a^2 - 15) > 0$, singura soluţie mai mare ca 8 a ecuaţiei $2a^4 - 40a^3 + 143a^2 + 120a - 225 = 0$ este $a = 15$. De aici rezultă imediat că $DE = a - 8 = 7$ (cm).



Problema 4. Pătratele unitate ale unei table 2016×2016 se colorează cu roşu sau albastru astfel încât să fie îndeplinite următoarele două condiţii:
1. orice pătrat unitate roşu care nu este situat pe marginea tablei are exact 5 vecini albaştri între cele 8 pătrate unitate cu care se învecinează (cu care are măcar un punct comun);
2. orice pătrat unitate albastru care nu este situat pe marginea tablei are exact 4 vecini roşii între cele 8 pătrate unitate cu care se învecinează.
Câte dintre pătratele unitate ale tablei sunt roşii?

Olimpiadă Cuba, 2012

Soluţie:
Împărţim tabla în pătrate 3×3. Ne uităm la pătratul unitate care se află în centrul unui asemenea pătrat 3×3. Dacă este roşu, atunci el are 5 vecini albaştri, deci în

pătratul 3×3 vor fi, cu tot cu pătratul roşu din mijloc, 4 pătrate unitate roşii şi 5 albastre. Dacă pătratul unitate din mijloc este albastru, el are 4 vecini roşii, deci şi în acest caz pătratul 3×3 este constituit din 4 pătrate unitate roşii şi 5 albastre. În total sunt 672^2 pătrate 3×3 şi fiecare conţine 4 pătrate unitate roşii, deci în total sunt $4 \cdot 672^2 = 1344^2$ pătrate unitate roşii.

Remarcă: Există colorări care respectă condiţiile din enunţ. De exemplu, dacă numerotăm liniile şi coloanele de la 1 la 2016, putem colora cu albastru toate pătratele care au fie ambele coordonate divizibile cu 3, fie niciuna. O altă colorare care respectă enunţul este cea în care colorăm albastre pătratele care au cel puţin una din coordonate divizibilă cu 3.