Problema 1. Fie un triunghi ABC, M un punct în interiorul său şi A', B', C' proiecţiile lui M pe dreptele BC, CA, respectiv AB. Arătaţi că dacă

$$\frac{MA'}{BC} = \frac{MB'}{CA} = \frac{MC'}{AB},$$

atunci triunghiul $A'B'C'$ şi triunghiul format de medianele[1] lui ABC sunt asemenea.

* * *

Soluţie:

Notăm $\frac{MA'}{BC} = x$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ şi m_a, m_b, m_c lungimile medianelor din A, B, respectiv C.

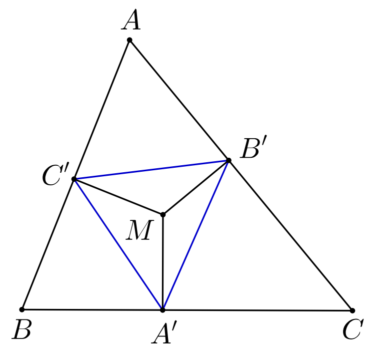
Atunci $MA' = ax$, $MB' = bx$, $MC' = cx$. În triunghiul $MB'C'$, $m(\sphericalangle B'MC') = 180^\circ - m(\sphericalangle ABC)$, deci aplicând teorema cosinusului avem:

$B'C'^2 = MB'^2 + MC'^2 - 2MB' \cdot MC' \cos(180^\circ - A) = x^2(b^2 + c^2 + 2bc \cos A)$.

Dar, din teorema cosinusului în triunghiul ABC, $2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$, deci $B'C'^2 = x^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Din formula pentru lungimea medianei din A avem că $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$, deci $B'C'^2 = 4x^2 m_a^2$.

Aşadar $\frac{B'C'}{m_a} = 2x$. Analog $\frac{C'A'}{m_b} = \frac{A'B'}{m_c} = 2x$ şi deci triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul format de medianele triunghiului ABC.



[1] Se ştie că dacă m_a, m_b, m_c sunt lungimile medianelor unui triunghi, atunci există un triunghi ale cărui laturi au lungimile m_a, m_b, m_c.

Rezultatul nu se schimbă chiar dacă punctele A', B', C' nu sunt toate interioare segmentelor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

BIBLIOGRAFIE

Maria Elena Panaitopol, Laurenţiu Panaitopol – *Probleme de geometrie plană* - soluţii trigonometrice, Ed. GIL, 2007, pag. 12, pb. 2

Problema 2. Demonstraţi că pentru orice număr prim impar p, există un unic număr natural nenul n astfel încât numărul $n(n+p)$ să fie pătrat perfect.

Greg Oman, Ohio State University

Soluţie:
Fie p un număr prim impar. Dorim să găsim numere naturale n şi k astfel încât $n(n+p) = k^2$. Înmulţind cu 4, relaţia precedentă se scrie $4n^2+4np+p^2-p^2 = 4k^2$, adică $(2n+p)^2 - (2k)^2 = p^2$. Rezultă că $(2n+p-2k)(2n+p+2k) = p^2$. Cum $k > 0$ şi p este prim, trebuie să avem $2n+p-2k = 1$ şi $2n+p+2k = p^2$, deci, adunând cele două relaţii, obţinem că $n = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$. Cum p este impar, n este într-adevăr număr natural. Pentru această valoare a lui n, $n(n+p) = \left(\dfrac{p^2-1}{4}\right)^2$. Să mai remarcăm că $\dfrac{p^2-1}{4} \in \mathbb{N}$.

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise, în ordine crescătoare, numerele naturale de la 1 la 100. Doi copii, Alina şi Bogdan, joacă următorul joc: pe rând, începând cu Alina, ei completează cele 99 de spaţii dintre oricare două numere consecutive cu semnele ,,+" sau ,, $\cdot$ ". Dacă la sfârşitul completării rezultatul obţinut este număr impar, câştigă Alina, în caz contrar câştigă Bogdan. Care din cei doi copii are strategie câştigătoare şi cum trebuie să joace el pentru a câştiga?

* * *

Soluţie:
Alina are strategie câştigătoare.
Ea poate juca astfel:
- începe prin a scrie ,,+" după primul număr, 1;
- în continuare, Bogdan face un semn în faţa sau în spatele unui număr impar (undeva între două numere consecutive, dintre care unul este, desigur, impar), atunci Alina face semnul ,, $\cdot$ " în spatele, respectiv în faţa aceluiaşi număr impar.
Astfel, Alina se asigură că fiecare din numerele impare, cu excepţia lui 1, este înmulţit cu (cel puţin) unul din vecinii săi pari, deci termenul în care apare acest

factor va fi par. Prin urmare, Alina asigură că rezultatul este $1+$ o sumă de numere pare, deci impar.

Problema 4. Determinaţi toate tripletele de numere naturale nenule (x, y, z) care satisfac egalitatea

$$x \cdot y! + 2y \cdot x! = z!.$$

Olimpiaă Estonia, 2012

Soluţie:
Evident, membrul drept este mai mare decât $x!$ şi $y!$, deci $z > x$ şi $z > y$.
Atunci trebuie ca fiecare din numerele $x \cdot y!$, $2y \cdot x!$ şi $z!$ să fie divizibil şi cu $x!$ şi cu $y!$.
Din faptul că $x \cdot y!$ este divizibil cu $x!$ rezultă că $y!$ este divizibil cu $(x-1)!$, adică $y \geq x - 1$.
Similar, din $2y \cdot x!$ divizibil cu $y!$ rezultă că $2 \cdot x!$ este divizibil cu $(y-1)!$. Dacă $y - 1 > x$, atunci $y - 2 \geq x$, deci $(y-1)! = (y-2)! \cdot (y-1) \geq x! \cdot (y-1) \geq 2 \cdot x!$ dacă $y \geq 3$, cu egalitate numai dacă $y = 3$ şi $x = 1$.
În celelalte cazuri rezultă că $y - 1 \leq x \leq y + 1$. Aşadar avem de tratat cazurile: **I.** $y = 1$, **II.** $y = 2$, **III.** $y = 3$ şi $x = 1$, **IV.** celelalte cazuri.

- $y = 1$ implică $x = 1$ sau $x = 2$. Obţinem soluţia $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$.
- $y = 2$ implică $x \in \{1, 2, 3\}$. Obţinem soluţia $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
- $y = 3$ implică $x = 1$ care nu convine.
- În cazurile rămase avem $y \in \{x-1,\ x,\ x+1\}$. Dacă $y = x$ atunci ecuaţia devine $3x \cdot x! = z!$. Membrul drept este însă divizibil cu $(x+1)!$ (căci $z \geq x + 1$), dar membrul stâng nu. Dacă $y = x-1$, ecuaţia devine $(2y+1) \cdot (y+1)! = z!$. Membrul drept este divizibil cu $(y+2)!$ (deoarece trebuie ca $z > y + 1$), dar membrul nu este divizibil cu $(y+2)!$. Rămâne că $y = x + 1$. În acest caz ecuaţia revine la $(x+2)! = z!$, deci la $z = x + 2$.

În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $(2, 1, 3)$ şi $(n,\ n+1,\ n+2)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar.