**Problema 1.** Determinaţi numerele naturale $x$ şi $y$ pentru care $2^x - 5^y$ este pătrat perfect.

* * *

**Soluţie:**
Fie $x, y$ şi $n$ numere naturale care satisfac $2^x - 5^y = n^2$.
Dacă $x = 0$ atunci trebuie ca $y = 0$ şi se obţine $n = 0$. Aşadar o primă soluţie este $x = y = 0$.
Dacă $x \geq 1$ atunci $2^x$ este par, deci $n$ este impar. Atunci $n^2$ dă restul 1 la împărţirea cu 4. Cum şi $5^y = (4+1)^y = M4 + 1$, rezultă că $2^x = 5^y + n^2 = (M4+1) + (M4+1) = M4 + 2$, deci $x = 1$. Rezultă că $y = 0$, $n = 1$, deci o a doua soluţie este $x = 1$, $y = 0$.
În concluzie, problema are două soluţii: $x = y = 0$ şi $x = 1$, $y = 0$.

*Remarcă:* Faptul că $5^y = M4 + 1$ se putea demonstra şi folosind că, pentru $y \geq 2$, ultimele două cifre ale lui $5^y - 1$ sunt 24, deci $5^y - 1$ este divizibil cu 4.

**Problema 2.** Determinaţi numerele întregi $x, y, z$ care verifică relaţiile:

$$x^2 + 6 = 5y, \quad y^2 + 6 = 5z, \quad z^2 + 6 = 5x.$$

*Andrei Eckstein*

**Soluţia 1:**
Fie $x, y, z$ numere întregi care verifică relaţiile din enunţ. Sumând relaţiile, obţinem $x^2+y^2+z^2+18 = 5x+5y+5z$, adică $(x^2-5x+6)+(y^2-5y+6)+(z^2-5z+6) = 0$.
Dar $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(x-3) \geq 0$ pentru că numerele întregi consecutive $x - 3$ şi $x - 2$ nu pot avea semne contrare.
Relaţia obţinută se scrie

$$\underbrace{(x-3)(x-2)}_{\geq 0} + \underbrace{(y-3)(y-2)}_{\geq 0} + \underbrace{(z-3)(z-2)}_{\geq 0} = 0.$$

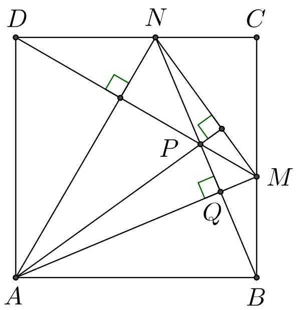
Această egalitate poate avea loc numai dacă fiecare termen este egal cu 0, deci dacă $x, y, z \in \{2, 3\}$.
• Dacă $x = 2$, din relaţia $x^2 + 6 = 5y$ obţinem $y = 2$, apoi din $y^2 + 6 = 5z$ obţinem $z = 2$. Cum şi ultima ecuaţie este verificată, $x = y = z = 2$ este o primă soluţie a problemei.
• Dacă $x = 3$, din relaţia $x^2 + 6 = 5y$ obţinem $y = 3$, apoi din $y^2 + 6 = 5z$ obţinem $z = 3$. Cum şi ultima ecuaţie este verificată, $x = y = z = 3$ este o a doua soluţie a problemei.
În concluzie, problema are două soluţii: $x = y = z = 2$ şi $x = y = z = 3$.

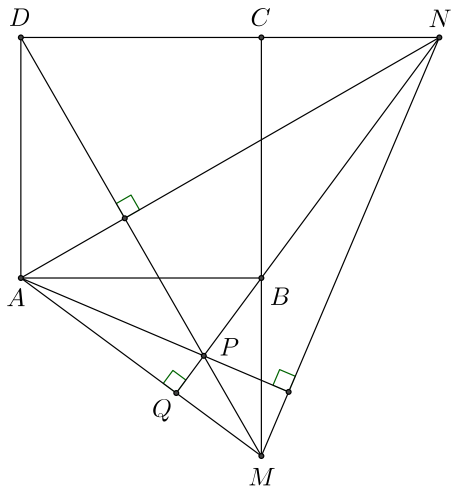
**Soluţia 2:**
Fie $x, y, z$ numere întregi care verifică relaţiile din enunţ. Sumând relaţiile, obţinem $x^2+y^2+z^2+18 = 5x+5y+5z$, adică $4x^2+4y^2+4z^2-20x-20y-20z+72 = 0$, sau $(2x-5)^2+(2y-5)^2+(2z-5)^2 = 3$. Rezultă că $(2x-5)^2 = (2y-5)^2 = (2z-5)^2 = 1$, deci $x, y, z \in \{2, 3\}$. Revenind la ecuaţiile din enunţ, în cazul $x = 2$ obţinem $y = z = 2$, iar în cazul $x = 3$ obţinem $y = z = 3$. Aşadar problema are două soluţii: $x = y = z = 2$ şi $x = y = z = 3$.

**Problema 3.** Se dă dreptunghiul $ABCD$ şi punctele $M \in (CB$ şi $N \in (DC$, fie ambele pe laturile dreptunghiului, fie ambele în exterior. Demonstraţi că dacă $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{CN}{BC}$, $\{P\} = DM \cap BN$ şi $AP \perp MN$, atunci $ABCD$ este pătrat.

*Petru Braica*

**Soluţie:**




În ambele configuraţii, din $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{CN}{BC}$, care este echivalentă cu $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BM}{CN}$, şi din $\angle ABM \equiv \angle BCN$ rezultă că triunghiurile $ABM$ şi $BCN$ sunt asemenea, deci că $\angle MAB \equiv \angle NBC$. Notând $AM \cap BN = \{Q\}$, din triunghiul $ABQ$ rezultă că $m(\angle AQB) = 180^\circ - m(\angle BAQ) - m(\angle QBA) = 180^\circ - m(\angle NBC) - m(\angle QBA) = 90^\circ$, adică $AM \perp BN$. Cum şi $AP \perp MN$, rezultă că $P$ este ortocentrul triunghiului $AMN$, deci $DM \perp AN$. De aici rezultă că $\angle DAN \equiv \angle CDM$, deci $\Delta\, DAN \sim \Delta\, CDM$ (UU).

Atunci $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DN}{CM}$, dar avem şi $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{CN}{BM}$, deci

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DN}{CM} = \frac{CN}{BM} = \frac{DN \pm CN}{CM \pm BM} = \frac{DC}{BC} = \frac{DC}{AD}.$$

În concluzie, avem $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DC}{AD}$, de unde $AD = DC$, adică $ABCD$ este pătrat.

**Problema 4.** Cinci numere naturale $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ au proprietatea că toate diferenţele $a_i - a_j$ cu $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i \neq j$, sunt diferite. Aflaţi cea mai mică valoare posibilă a lui $a_5$.

*Olimpiadă Cuba*, 2005

**Soluţie:**
Este suficient ca diferenţele $a_j - a_i$ cu $j > i$ să fie diferite, acestea fiind pozitive, iar celelalte fiind opusele lor. Avem 10 diferenţe care trebuie să fie numere naturale nenule diferite:
$a_5 - a_1$, $a_5 - a_2$, $a_5 - a_3$, $a_5 - a_4$
$a_4 - a_1$, $a_4 - a_2$, $a_4 - a_3$
$a_3 - a_1$, $a_3 - a_2$
$a_2 - a_1$.
Rezultă că diferenţa cea mai mare, $a_5 - a_1$, trebuie să fie cel puţin 10, deci $a_5$ este cel puţin 10. Dacă $a_5 - a_1 = 10$, celelalte diferenţe trebuie să fie $1, 2, \ldots, 9$.
Vom arăta că $a_5$ nu poate fi 10.
O metodă ar fi să remarcăm că suma celor 10 diferenţe ar trebui să fie pe de o parte $4a_5 + 2a_4 - 2a_2 - 4a_1$, adică un număr par, şi pe de altă parte $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, care este impar, deci nu se poate ca cele 10 diferenţe să fie $1, 2, \ldots, 10$, adică nu se poate ca $a_5 = 10$.
O altă cale este cea ,,băbească": dacă $a_5 = 10$, atunci $a_1 = 0$. Pentru a obţine o diferenţă 9 trebuie fie ca $a_2 = 1$, fie ca $a_4 = 9$.
În primul caz, pentru a obţine o diferenţă 8 trebuie fie ca $a_3 = 2$ (dar atunci $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = 1$, ceea ce nu convine), fie ca $a_4 = 8$. Încercând pe rând $x_3 = 2, 3, \ldots, 7$, constatăm că în niciunul din aceste cazuri nu obţinem 10 diferenţe diferite. Analog în cazul $a_4 = 9$.
O a treia cale este să ne uităm numai la diferenţele $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ şi $a_5 - a_4$ a căror sumă este $a_5 - a_1 = 10$. Aceste diferenţe trebuie să fie diferite şi nenule, deci trebuie să fie, într-o anumită ordine, $1, 2, 3, 4$. Dar dacă diferenţa 1 stă lângă diferenţa 2, atunci suma celor două diferenţe este 3 care astfel va apărea de două ori (de exemplu, dacă $a_3 - a_2 = 1$, $a_2 - a_1 = 2$, atunci $a_3 - a_1 = 3$, dar şi $a_4 - a_3$ sau $a_5 - a_4$ este 3, deci diferenţele nu sunt diferite). La fel, diferenţa 1 nu poate sta nici lângă diferenţa 3, deci trebuie să stea lângă diferenţa 4. Dar atunci $a_3 - a_1 = a_5 - a_3 = 5$, deci iarăşi diferenţele nu sunt diferite.
Rezultă aşadar că $a_5$ este cel puţin 11.
Alegând, de exemplu, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $a_5 = 11$ obţinem 10 diferenţe diferite (toate numerele de la 1 la 11 în afară de 6).
Alte exemple cu $a_5 = 11$ sunt: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$, $a_5 = 11$ sau $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$, $a_5 = 11$ sau $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 7$, $a_4 = 8$, $a_5 = 11$.