Problema 1. Se ştie că modificând o singură cifră din scrierea zecimală a numărului $2^{42643801}$ se obţine un număr prim p.
a) Care este ultima cifră a lui p?
b) Arătaţi că 42643801 este număr prim.

Dorel Miheţ (Concursul interjudeţean ,,Traian Lalescu", Arad, 2013)

Soluţie:
a) Numărul $2^{42643801}$ se termină cu cifra 2 (exponentul dă rest 1 la împărţirea cu 4, iar ultima cifră a lui 2^n se repetă din 4 în 4). Pentru a obţine un număr prim, trebuie să schimbăm ultima cifră a lui $2^{42643801}$.
Arătăm că această cifră trebuie schimbată în 1, deci că p se termină în cifra 1.
Evident, ultima cifră a lui p nu poate fi 0, 2, 4, 5, 6 sau 8.
Dacă $u(p) = 3$, atunci $p = 2^{42643801}+1 = (3-1)^{42643801}+1 = M_3+(-1)^{42643801}+1 = M_3$, ceea ce contrazice faptul că p este număr prim.
Dacă $u(p) = 7$, atunci $p = 2^{42643801} + 5 = 7 + (2^{42643801} - 2) = 7 + 2(2^{42643800} - 1) = 7 + 2(8^{14214600} - 1) = 7 + 2[(7 + 1)^{14214600} - 1] = 7 + 2 \cdot M_7 = M_7$, ceea ce contrazice faptul că p este număr prim.
Dacă $u(p) = 9$, atunci $p = 2^{42643801} + 7 = 2^{42643801} + 1 + 6 = M_3 + 6 = M_3$, ceea ce contrazice faptul că p este număr prim.
Rămâne că $u(p) = 1$.
b) În plus, din cele de mai sus rezultă că $p = 2^{42643801} - 1$ este număr prim. Presupunem prin absurd că 42643801 este compus. Atunci există $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$, astfel încât $mn = 42643801$. Atunci $1 < 2^m - 1 < 2^{42643801} - 1$ şi $2^{42643801} - 1 = 2^{mn} - 1$ se divide cu $2^m - 1$, absurd. Contradicţia la care am ajuns arată că 42643801 este număr prim.

Remarci:
1. Faptul că $2^m - 1$ divide $2^{mn} - 1$ rezultă din faptul că $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)$, identitate care se verifică direct prin desfacerea parantezelor.
Alte argumentări posibile:
$2^{mn} = (2^m)^n = \big((2^m - 1) + 1\big)^n = M_{2^m-1} + 1^n$, deci $2^m - 1$ divide $2^{mn} - 1$.
Altfel: la nivelul clasei a V-a se ştie că $2^u - 1 = 2^{u-1} + 2^{u-2} + \ldots + 2 + 1$. Dacă $u = mn$, putem grupa cei mn termeni ai sumei în n grupe de câte m şi da factor comun din fiecare grupă suma $2^{m-1} + 2^{m-2} + \ldots + 2 + 1$.

2. Un număr prim de forma $2^n - 1$ se numste număr prim *Mersenne*. Dacă $2^n - 1$ este număr prim Mersenne, atunci n este număr prim. Numărul p din problemă este un număr prim Mersenne[1] care are 12.837.064 cifre (al patrulea cel mai mare cunoscut până în prezent - se cunosc 49 de asemenea numere şi nu se ştie dacă numărul lor este finit sau infinit; cele mai mici asemenea numere sunt 3, 7, 31 şi

[1] numit astfel după călugărul *Martin Mersenne* care le-a studiat în secolul al XVII-lea

127, cunoscute încă din antichitate.)

Problema 2. Demonstraţi că orice număr întreg poate fi scris sub forma

$$x^2 + y^2 - z^2,$$

cu $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Concursul KöMaL, problema B. 4840.

Soluţie:
Alegem $y = z + 1$ şi avem de arătat că orice număr întreg poate fi scris sub forma $x^2 + 2z + 1$, cu $x \neq 0$, $z \neq 0$ şi $z \neq -1$.
Alegând $x = 1$ obţinem $2z + 2$, cu $z \neq 0$ şi $z \neq -1$, adică orice număr par diferit de 0 şi 2.
Şi numerele 0 şi -2 se pot scrie sub forma dorită, de exemplu astfel: $0 = 3^2+4^2-5^2$, $-2 = 1^2 + 1^2 - 2^2$.
Alegând $x = 2$ obţinem $2z+5$, cu $z \neq 0$ şi $z \neq -1$, adică orice număr impar diferit de 3 şi 5.
Pe de altă parte, $3 = 4^2 + 6^2 - 7^2$, $5 = 4^2 + 5^2 - 6^2$.
În concluzie, am scris orice număr întreg sub forma $x^2 + y^2 - z^2$, cu $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.
Desigur, există şi alte scrieri, aşa încât sunt multe moduri de a soluţiona această problemă.

Soluţia oficială din KöMaL:
Fie n un număr întreg arbitrar. Căutăm o scriere $n = x^2+y^2-z^2$ în care $z = y+1$. Atunci $n = x^2 + y^2 - (y + 1)^2 = x^2 - (2y + 1)$, deci $n + 2y + 1$ trebuie să fie pătrat perfect. Deoarece y trebuie să fie număr natural nenul, căutăm un pătrat perfect care este cu cel puţin 3 mai mare ca n şi este de paritate contrară cu n. Îl putem, de exemplu, alege pe $(n^2 + 3)^2$. Fie, deci, $x = n^2 + 3$. Atunci $y = \dfrac{x^2 - n - 1}{2} = \dfrac{n^4 + 6n^2 - n + 8}{2} = 3n^2 + 4 + \dfrac{n^4 - n}{2}$, care este număr natural nenul, deci şi $z = y+1$ este tot natural nenul. Cu această alegere a lu x, y, z, avem că $n = x^2 + y^2 - z^2$, de unde concluzia.

Problema 3. O încuietoare, dotată cu trei butoane, se deschide dacă cele trei butoane sunt apăsate într-o anumită ordine. Care este numărul minim de apăsări de buton pe care trebuie să le facem pentru a fi siguri că am deschis încuietoarea?

(Eventualele apăsări anterioare de buton, precedente celor trei apăsări care au dus la deschiderea încuietorii, nu au efect asupra mecanismului acesteia.)

De exemplu, dacă încuietoarea ar fi avut numai două butoane, din trei apăsări (primul buton, al doilea buton, primul buton) am fi fost siguri că am deschis incuietoarea, indiferent dacă ordinea de apăsare a butoanelor care a deschis-o a fost ,,primul buton, al doilea buton" sau ,,al doilea buton, primul buton".

Concursul Arany Dániel, Ungaria, 2011

Soluţie:
Să notăm butoanele cu $1, 2, 3$. Sunt 6 combinaţii posibile care ar putea deschide încuetoarea: 123, 132, 213, 231, 312 şi 321.
Este evident că pentru a fi siguri că deschidem încuietoarea indiferent de care este codul, fiecare din cele şase succesiuni de apasări de buton trebuie să fie încercată. Pentru a avea 6 secvenţe de trei apăsări, este nevoie de cel puţin 8 apăsări. O secvenţă de 8 apăsări, $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8$, conţine într-adevăr 6 secvenţe de 3 apăsări: $x_1x_2x_3$, $x_2x_3x_4$, $x_3x_4x_5$, $x_4x_5x_6$, $x_5x_6x_7$, $x_6x_7x_8$. O secvenţă mai scurtă (formată din mai puţin de 8 apăsări) nu conţine 6 secvenţe de 3 apăsări.
Aşadar, este nevoie de cel puţin 8 apăsări.
În continuare, demonstrăm că 8 apăsări nu sunt întotdeauna suficiente. Pentru a fi sufieciente, fiecare din secvenţele $x_1x_2x_3$, $x_2x_3x_4$, $x_3x_4x_5$, $x_4x_5x_6$, $x_5x_6x_7$, $x_6x_7x_8$ trebuie să coincidă cu câte una din secvenţele 123, 132, 213, 231, 312 şi 321. Aşadar fiecare secvenţă trebuie să conţină cifre distincte. Dar $\{1, 2, 3\} = \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_2, x_3, x_4\}$ implică $x_1 = x_4$. Analog, $\{1, 2, 3\} = \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_3, x_4, x_5\}$ implică $x_2 = x_5$, iar $\{1, 2, 3\} = \{x_3, x_4, x_5\} = \{x_4, x_5, x_6\}$ conduce la $x_3 = x_6$. Dar atunci secvenţele $x_1x_2x_3$ şi $x_4x_5x_6$ coincid, deci nu se obţin toate cele şase secvenţe de trei apăsări.
În concluzie, este nevoie de minim 9 apăsări.
Vom arăta printr-un exemplu că 9 apăsări sunt suficiente pentru a deschide încuietoarea indiferent care ar fi codul: putem apăsa, în ordine, butoanele

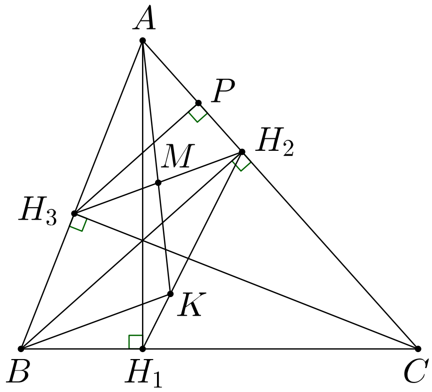
$$1, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 1.$$

Această succesiune de apăsări e garantată să deschidă încuietoarea, deci numărul minim de apăsări de buton care asigură deschiderea încuuietorii este 9.

Problema 4. Fie AH_1, BH_2 şi CH_3 înălţimile triunghiului ABC. Punctul M este mijlocul lui $[H_2H_3]$. Dreapta AM intersectează H_1H_2 în punctul K. Demonstraţi că punctul K se află pe linia mijlocie a triunghiului ABC paralelă cu AC.

A. Rudenko, D. Khilko, Olimpiada de geometrie ,,Sharygin", Rusia, 2016

Soluţia oficială: Fie P proiecţia lui H_3 pe AC. Triunghiul H_3PH_2 este dreptunghic şi M este mijlocul ipotenuzei sale, deci $MP = MH_2$ şi $\sphericalangle MPH_2 \equiv \sphericalangle MH_2A$. Dar $\sphericalangle H_1H_2C \equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle H_3H_2A$, de unde $MP \parallel KH_2$. De aici obţinem că $\dfrac{AM}{AK} = \dfrac{AP}{AH_2}$. Triunghiurile AH_2H_3 şi ABC sunt asemenea, deci $\dfrac{AP}{AH_2} = \dfrac{AH_3}{AB}$. Atunci $\dfrac{AM}{AK} = \dfrac{AP}{AH_2} = \dfrac{AH_3}{AB}$ şi $H_3M \parallel BK$. De asemenea, $m(\sphericalangle H_3H_2B) = 90^\circ - m(\sphericalangle H_3H_2A) = 90^\circ - m(\sphericalangle H_1H_2C) = m(\sphericalangle BH_2K)$. Atunci $\sphericalangle H_2BK \equiv \sphericalangle H_3H_2B \equiv \sphericalangle BH_2K$, deci triunghiul BH_2K este isoscel. Este clar că linia mijlocie paralelă cu AC este mediatoarea lui $[BH_2]$, deci trece prin K.


A
P
H_2
M
H_3
K
B
H_1
C