**Problema 1.** Dacă $a, b, c$ sunt numere reale astfel ca $a + \dfrac{1}{b} = 7$, $b + \dfrac{1}{c} = 14$, $c + \dfrac{1}{a} = 21$, calculaţi $abc + \dfrac{1}{abc}$.

* * *

**Soluţie:**
Observăm că înmulţind relaţiile din enunţ obţinem

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) = abc + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} =$$

$$abc + \frac{1}{abc} + \left(a+\frac{1}{b}\right) + \left(b+\frac{1}{c}\right) + \left(c+\frac{1}{a}\right),$$

de unde $abc + \dfrac{1}{abc} = 7 \cdot 14 \cdot 21 - 7 - 14 - 21 = 2016$.

**Problema 2.** Demonstraţi că există o infinitate de numere compuse în şirul $1, 31, 331, 3331, \ldots$ .

*Concursul KöMaL*, problema **B. 3525.**, februarie 2002

**Soluţie:**
Vom folosi următorul rezultat:

*Orice număr prim cu 10 are o infinitate de multipli scrişi numai cu cifra 1.*

*Demonstraţie:* Fie $n$ un număr natural prim cu 10. Considerăm numerele

$$x_1 = 1,\ x_2 = 11,\ x_3 = 111,\ \ldots,\ x_{n+1} = \underbrace{111\ldots1}_{n+1 \text{ cifre}}.$$

Din principiul cutiei rezultă că există printre aceste numere două, $x_i$ şi $x_j$, cu $i < j$, care să dea acelaşi rest la împărţirea cu $n$. Atunci $n \mid (x_j - x_i)$, adică $n \mid \underbrace{111\ldots1}_{j-i \text{ cifre}}\underbrace{000\ldots0}_{i \text{ cifre}}$. Dar cum $(n, 10) = 1$, rezultă că $x_{j-i}$ este un multiplu al lui $n$ scris numai cu cifra 1. Juxtapunând numere divizibile cu $n$ obţinem tot numere divizibile cu $n$, astfel, mai general, orice număr de forma $x_{k(j-i)}$, $k \in \mathbb{N}^*$, este divizibil cu $n$.

Din cele de mai sus rezultă că 31 are o infinitate de multipli scrişi numai cu cifra 3. Adăugând la sfârşitul unui asemenea număr, $N$, cifrele $3, 1$ obţinem $100N + 31$, tot un multiplu de 31. Prin urmare, şirul conţine o infinitate de numere divizibile cu 31 şi mai mari decât 31, deci compuse.

**Remarcă:** Putem preciza o mulţime infinită de numere divizibile cu 31: din mica teoremă a lui Fermat, numărul $10^{30}-1$ este divizibil cu 31, deci şi $10^{30k}-1$ sunt divizibile cu 31. Cum $(3,31)=1$, rezultă că toate numerele de forma $\underbrace{333\ldots3}_{30k\ \text{cifre}}$ sunt divizibile cu 31. Prin urmare, toate numerele de forma $\underbrace{333\ldots3}_{30k+1\ \text{cifre}}1$ sunt divizibile cu 31.

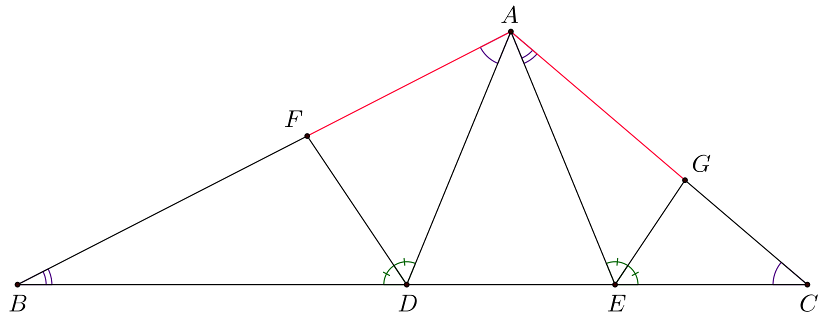
Întâmplător, chiar $10^{15}-1$ este divizibil cu 31, deci în remarca de mai sus putem înlocui $30k$ cu $15k$.

**Observaţie:** Primul număr compus din şir este cel cu 8 cifre de 3; acesta este divizibil cu 17.
În rezolvarea prezentată mai sus, numărul 31 poate fi înlocuit cu orice alt număr care are un multiplu în şirul dat: el va avea o infinitate de multipli scrişi numai cu cifra 3 care, juxtapuşi cu multiplul deja găsit, oferă infinitatea de termeni ai şirului care sunt numere compuse. De exemplu, am fi putut alege 17. Din mica teoremă a lui Fermat rezultă că 17 divide $10^{16k}-1$, deci 17 divide $\underbrace{333\ldots3}_{16k\ \text{cifre}}$, deci şi pe $\underbrace{333\ldots3}_{16k+8\ \text{cifre}}1$.
Se poate verifica uşor că niciun număr prim mai mic decât 17 nu divide vreun termen al şirului.

**Problema 3.** Pe latura $[BC]$ a triunghiului $ABC$, cu $m(\sphericalangle BAC) > 90°$, se consideră punctele $D$ şi $E$ astfel încât $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle ABC$.
Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ADB$ şi $\sphericalangle AEC$ taie laturile $[AB]$ respectiv $[AC]$ în $F$ şi $G$. Demonstraţi că triunghiul $AFG$ este isoscel.

*Petru Braica*

**Soluţie:**
Deoarece $m(\sphericalangle DAB)+m(\sphericalangle EAC) = m(\sphericalangle ACB)+m(\sphericalangle ABC) < 90° < m(\sphericalangle ABC)$, rezultă că $D \in (BE)$.
Avem că $m(\sphericalangle ADE) = m(\sphericalangle DAB) + m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle ABC)$ şi, analog, $m(\sphericalangle AED) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB)$, deci triunghiul $ADE$ este isoscel, cu $AD = AE$. În plus, $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AEC$, deci şi $\sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle AEG$. Triunghiurile $FBD$ şi $GAE$ sunt asemenea (cazul de asemănare UU), deci $\dfrac{FB}{AG} = \dfrac{BD}{AE}$, sau $\dfrac{BF}{BD} = \dfrac{AG}{AE}$. Din teorema bisectoarei aplicată în triunghiul $ABD$ rezultă atunci că $\dfrac{AF}{BF} = \dfrac{AD}{BD}$, deci $\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{BF}{BD} = \dfrac{AG}{AE}$. Cum $AD = AE$, de aici rezultă $AF = AG$ şi concluzia.




**Problema 4.** Pătrăţelele unitate ale unei table $7 \times 7$ se completează cu numerele $1, 2, \ldots, 49$ astfel încât numere consecutive sunt scrise în pătrăţele care au o latură comună. Care este numărul maxim de numere prime pe care le poate conţine un rând al tablei?

*Olimpiadă Turcia,* 2013, runda I

**Soluţie:** Colorăm pătrăţelele tablei cu alb şi negru, asemeni unei table de şah, cu colţurile având culoarea neagră. Două pătrăţele care au o latură comună vor avea culori diferite. Avem 25 de pătrăţele negre şi 24 albe. Atunci toate pătrăţelele negre vor conţine numere impare, iar pătrăţelele albe numere pare. Fiecare rând va conţine 4 pătrăţele albe şi 3 negre sau invers, adică 4 numere de o paritate şi 3 de cealaltă. Prin urmare, deoarece cu excepţia lui 2, toate numerele prime sunt impare, pe o linie putem avea cel mult 5 numere prime: 4 impare, plus numărul 2.

Pe de altă parte, chiar există o amplasare a numerelor pe tablă care respectă cerinţele şi pentru care există o linie care conţine 5 numere prime, şi anume prima linie a tablei de mai jos:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 11 | 12 | 13 | 18 | 19 |
| 4 | 1 | 10 | 9 | 14 | 17 | 20 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 15 | 16 | 21 |
| 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 |
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |

În concluzie, numărul maxim de numere prime pe care le poate avea o linie a unei table completate după regulile din enunţ este 5.