Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care

$$a^b + b^a = 2ab.$$

* * *

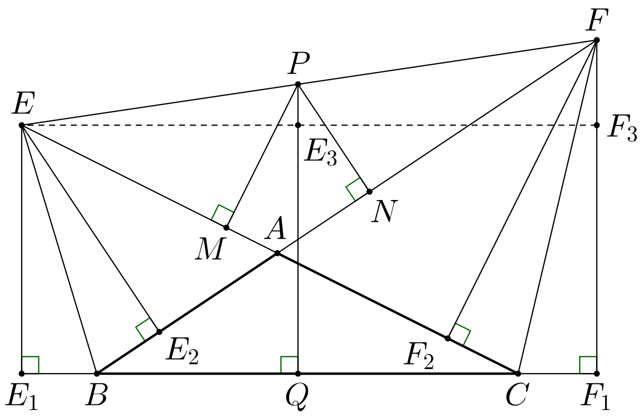
Soluţie:
Dacă $a, b \geq 2$, atunci $a^b + b^a \geq a^2 + b^2 \geq 2ab$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, deci cu $(a-b)^2 \geq 0$.
Egalitate avem numai dacă $a - b = 0$, $a^b = a^2$ şi $b^a = b^2$, deci numai pentru $a = b = 2$.
Dacă $a = 1$, ecuaţia din enunţ devine $1 + b = 2b$, cu soluţia $b = 1$. Aceeaşi soluţie, $a = b = 1$, o găsim şi în cazul $b = 1$.
În concluzie, problema are două soluţii: $a = b = 1$ şi $a = b = 2$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi obtuzunghic, cu $m(\sphericalangle A) > 90°$. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ intersectează dreptele AC, respectiv AB, în punctele E şi F. Fie P un punct oarecare al segmentului (EF) şi M, N, Q proiecţiile lui P pe dreptele AC, AB, respectiv BC.
Demonstraţi că $PQ = PM + PN$.

* * *

Soluţie:
Să observăm mai întâi că bisectoarea exterioară a unghiului B intersectează AC în exteriorul laturii, dincolo de A. Acest lucru rezultă din faptul că $m(\sphericalangle EBA) + m(\sphericalangle EAB) < 180°$.
Fie E_1 şi E_2 proiecţiile lui E pe BC, respectiv AB şi fie F_1, F_2 proiecţiile lui F pe BC, respectiv AC. Deoarece E se află pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABE_1$, avem $EE_1 = EE_2$¿ Analog, $FF_1 = FF_2$. Avem $PN \parallel EE_2$, de unde $\dfrac{PN}{EE_2} = \dfrac{PF}{EF}$. Analog rezultă $\dfrac{PM}{FF_2} = \dfrac{EP}{EF}$, deci $PN + PM = \dfrac{PF}{EF} \cdot EE_2 + \dfrac{PE}{EF} \cdot FF_2 = \dfrac{PF}{EF} \cdot EE_1 + \dfrac{PE}{EF} \cdot FF_1$.

Vom estima PQ în funcţie de EE_1 şi FF_1 din trapezul dreptunghic EE_1F_1F.
Să presupunem că $EE_1 \leq FF_1$, celălalt caz fiind similar. Dacă E_3 şi F_3 sunt proiecţiile lui E pe PQ, respectiv FF_1, avem $PQ = QE_3 + E_3P = EE_1 + \dfrac{PE}{EF} \cdot F_3F = EE_1 + \dfrac{PE}{EF} \cdot (FF_1 - EE_1) = \dfrac{PF}{EF} \cdot EE_1 + \dfrac{PE}{EF} \cdot FF_1 = PN + PM$, ceea ce trebuia demonstrat.



Observaţie: (*Petru Braica*)
Afirmaţia problemei rămâne valabilă şi dacă în loc de bisectoare exterioare se consideră bisectoarele interioare ale unghiurilor B şi C. Demonstraţia este practic neschimbată.

Problema 3. Câte soluţii (a, b, c, d) are în mulţimea numerelor întregi ecuaţia

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^{2017}\,?$$

* * *

Soluţie:
Deoarece un pătrat perfect poate da numai resturile 0, 1 sau 4 la împărţirea cu 8, deducem că a, b, c, d trebuie să fie numere pare. Există, deci, numerele naturale a_1, b_1, c_1, d_1 astfel ca $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$, $d = 2d_1$. Ecuaţia din enunţ devine $4a_1^2 + 4b_1^2 + 4c_1^2 + 4d_1^2 = 2^{2017}$, adică $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 2^{2015}$.
Repetând raţionamentul de mai sus, deducem că a_1, b_1, c_1, d_1 trebuie să fie la rândul lor numere pare, deci că există numerele naturale a_2, b_2, c_2, d_2 astfel ca $a_1 = 2a_2$, $b_1 = 2b_2$, $c_1 = 2c_2$, $d_1 = 2d_2$. Ecuaţia din enunţ devine $4a_2^2+4b_2^2+4c_2^2+4d_2^2 = 2^{2015}$, adică $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 = 2^{2013}$.
Continuăm acest procedeu până când ajungem la numerele a_{1008}, b_{1008}, c_{1008}, d_{1008} care trebuie să verifice ecuaţia $a_{1008}^2 + b_{1008}^2 + c_{1008}^2 + d_{1008}^2 = 2$. Evident, două dintre numere trebuie să fie egale cu 0, iar celelalte două pot fi 1 sau -1.
Sunt şase moduri de a alege cele două variabile care sunt egale cu 0 şi câte două variante de a alege semnele celorlalte două variabile, deci ultima ecuaţie are 24 de soluţii. Fiecăreia din aceste soluţii îi corespunde exact o soluţie a ecuaţiei iniţiale, deci aceasta are la rândul ei 24 de soluţii.
Evident soluţiile sunt de forma $\pm\,2^{1008}$, $\pm\,2^{1008}$, 0, 0.

Problema 4. O prinţesă locuieşte într-un apartament format din 17 camere dispuse într-un rând. Fiecare cameră are o uşă către exterior şi există câte o uşă între oricare două camere vecine. Prinţesa îşi petrece fiecare zi într-o cameră care este vecină cu camera în care şi-a petrecut ziua precedentă. Într-o zi, soseşte un prinţ dintr-o ţară îndepărtată, hotărât să cucerească prinţesa. Majordomul îi explică acestuia obiceiurile prinţesei şi îi comunică regulile pe care trebuie să le urmeze în încercarea de a o peţi pe prinţesă:
În fiecare zi prinţul poate alege una din uşile exterioare şi bate la acea uşă. Dacă prinţesa este în respectiva cameră, ea îi va deschide uşa şi în cele din urmă se va căsători cu prinţul. Dacă prinţesa nu este în respectiva cameră, atunci nu se întâmplă nimic, iar prinţul va avea o nouă şansă a doua zi.
Din păcate, biletul de întoarcere al prinţului expiră după 30 de zile. Are prinţul suficient de mult timp la dispoziţie pentru a fi sigur că o poate cuceri pe prinţesă?

* * *

Soluţie:
30 de zile sunt suficiente. Numerotăm camerele de la 1 la 17. Strategia prinţului ar putea fi următoarea:
Prinţul bate în ordine la uşile camerelor: 2, 3, 4, ..., 16, apoi din nou 16, 15, ..., 2 (în ordine inversă sau nu). Cele 30 de zile s-au scurs. Să demonstrăm că prinţul a bătut la un moment dat la o uşă în spatele căreia se afla prinţesa.
Dacă iniţial prinţesa era într-o cameră cu număr par, atunci în primele 15 zile ea se află în cameră cu număr par atunci când prinţul bate la uşa unei camere cu număr par şi se află într-o cameră cu număr impar în zilele în care prinţul încearcă tocmai o astfel de cameră. Prin urmare, în acest caz, cei doi nu se pot petrece. Aşadar, în acest caz, dacă cei doi nu s-au întâlnit, înseamnă că prinţesa a rămas mereu într-o cameră cu număr mai mare decât cea încercată de prinţ şi de aceeaşi paritate, ceea ce după 15 zile nu mai este posibil, prinţul fiind la uşa camerei cu număr par cel mai mare. Aşa încât, dacă cei doi nu s-au întâlnit în primele 15 zile, rezultă că iniţial prinţesa a fost în cameră impară. Atunci în ziua a 16 ea va fi într-o cameră cu număr par şi putem relua strategia pe care am încercat-o în primele 15 zile. De astă dată însă, prinţul îşi va găsi prinţesa.