Problema 1. Demonstraţi că, pentru orice număr natural n, mulţimea

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{n}{11} < \frac{x}{15} < \frac{n+1}{11} \right\}$$

are cel mult două elemente.

Mircea Fianu, Olimpiada locală Bucureşti, 1997

Soluţie:
Dacă $x \in A_n$, din $15n < 11x < 15(n+1)$ rezultă că

$$11x \in \{15n+1,\ 15n+2,\ \ldots\ ,\ 15n+14\}.$$

Dar printre aceste 14 numere naturale consecutive există cel mult două divizibile cu 11 (în caz contrar diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre acestea ar fi cel puţin 22). Aşadar A_n are cel mult două elemente.

Problema 2. Se aleg 1008 elemente ale mulţimii $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$. Arătaţi că există două numere alese care au proprietatea că cel mai mare divizor comun al lor divide fiecare număr ales.

prelucrare *Andrei Eckstein*

Soluţie:
Dacă numărul $a = 1$ se află printre cele alese, atunci luând b un alt număr ales, avem $(a, b) = 1$, care divide toate numerele alese.
Dacă numărul 1 nu a fost ales, fie avem printre numerele alese două numere consecutive, fie numerele alese sunt exact numerele pare, adică $2, 4, \ldots, 2016$. Într-adevăr, dacă printre cele 1008 numere alese nu avem numere consecutive, primul este cel puţin 2, al doilea cel puţin 4, al treilea cel puţin 6, ş.a.m.d., al 1008-lea este cel puţin 2016. Dacă ultimul număr ales este 2016 şi nu avem numere consecutive alese, precedentele numere alese sunt tocmai cele pare.
În primul caz, cele două numere consecutive alese vor avea cel mai mare divizor comun 1, număr care divide evident fiecare din numerele alese.
În cazul al doilea, putem lua $a = 2$, $b = 4$ (sau orice alt număr ales); în acest caz avem $(a, b) = 2$, care divide fiecare din numerele alese, acestea fiind toate pare.

Problema 3.
a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = x.$

* * *

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = x.$

Olimpiadă Canada

Soluţie:
Să remarcăm de la început că, dacă x este soluţie a uneia din cele două ecuaţii, atunci x este suma a trei numere întregi, deci trebuie să fie întreg.

a) *Metoda 1:* Pentru orice $y \in \mathbb{R}$ avem $[y] \leq y < [y] + 1$. Folosind acest fapt, avem $\left[\dfrac{x}{2}\right] \leq \dfrac{x}{2}$, $\left[\dfrac{x}{3}\right] \leq \dfrac{x}{3}$ şi $\left[\dfrac{x}{6}\right] \leq \dfrac{x}{6}$. Adunând aceste relaţii obţinem $\left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x}{3}\right] + \left[\dfrac{x}{6}\right] \leq x$, deci dacă x este soluţie a ecuaţiei din enunţ, atunci x trebuie să satisfacă fiecare din cele trei inegalităţi cu egalitate, adică x trebuie să fie număr întreg divizibil cu 2, 3 şi 6, adică cu 6. Reciproc, dacă x este un multiplu de 6, $x = 6k$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $\left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x}{3}\right] + \left[\dfrac{x}{4}\right] = 3k + 2k + k = 6k = x$, deci orice multiplu de 6 este soluţie a ecuaţiei.
În concluzie, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Metoda 2: Deoarece $\left[\dfrac{x}{2}\right]$ reprezintă câtul împărţirii lui x la 2, $\left[\dfrac{x}{3}\right]$ câtul împărţirii lui x la 3, iar $\left[\dfrac{x}{6}\right]$ reprezintă câtul împărţirii lui x la 6, este natural să considerăm şase cazuri, în funcţie de restul împărţirii lui x la 6 (6 este cel mai mic multiplu comun al numerelor 2, 3, 6):
• $x = 6k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $3k + 2k + k = 6k$, care este verificată de orice k, deci toate numerele de forma $6k$ sunt soluţii ale ecuaţiei.
• $x = 6k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $3k + 2k + k = 6k + 1$, care nu are soluţii.
• $x = 6k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(3k + 1) + 2k + k = 6k + 2$, care nu are soluţii.
• $x = 6k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(3k + 1) + (2k + 1) + k = 6k + 3$, care nu are soluţii.
• $x = 6k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(3k + 2) + (2k + 1) + k = 6k + 4$, care nu are soluţii.
• $x = 6k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(3k + 2) + (2k + 1) + k = 6k + 5$, care nu are soluţii.
În concluzie, singurele soluţii sunt numerele divizibile cu 6.

b) *Metoda 1:* Dacă x este soluţie a ecuaţiei din enunţ, atunci $x = \left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x}{3}\right] + \left[\dfrac{x}{4}\right] \leq \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} < \left[\dfrac{x}{2}\right] + 1 + \left[\dfrac{x}{3}\right] + 1 + \left[\dfrac{x}{4}\right] + 1 = x + 3$, adică $x \leq \dfrac{13x}{12} < x + 3$, deci $x \geq 0$ şi $x < 36$. Verificând pe rând aceste 36 de valori obţinem că singurele soluţii sunt $0, 4, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 23$.

Metoda 2: Vom proceda ca la metoda a doua prezentată mai sus. Ne vor interesa câturile împărţirii lui x la 2, 3 şi 4. Deoarece cel mai mic multiplu comun al numerelor 2, 3, 4 este 12, vom trata 12 cazuri, în funcţie de restul împărţirii lui x la 12:

• $x = 12k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $6k + 4k + 3k = 12k$, care are soluţia $k = 0$, deci $x = 0$ este soluţie.

• $x = 12k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $6k + 4k + 3k = 12k + 1$, care are soluţia $k = 1$, deci $x = 13$ este soluţie.

• $x = 12k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k + 1) + 4k + 3k = 12k + 2$, care are soluţia $k = 1$, deci $x = 14$ este soluţie.

• $x = 12k+3$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k+1)+(4k+1)+3k = 12k+3$, care are soluţia $k = 1$, deci $x = 15$ este soluţie.

• $x = 12k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k + 2) + (4k + 1) + (3k + 1) = 12k + 4$, care are soluţia $k = 0$, deci $x = 4$ este soluţie.

• $x = 12k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k + 2) + (4k + 1) + (3k + 1) = 12k + 5$, care are soluţia $k = 1$, deci $x = 17$ este soluţie.

• $x = 12k + 6$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k + 3) + (4k + 2) + (3k + 1) = 12k + 6$, care are soluţia $k = 0$, deci $x = 6$ este soluţie.

• $x = 12k + 7$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k + 3) + (4k + 2) + (3k + 1) = 12k + 7$, care are soluţia $k = 1$, deci $x = 19$ este soluţie.

• $x = 12k + 8$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k + 4) + (4k + 2) + (3k + 2) = 12k + 8$, care are soluţia $k = 0$, deci $x = 8$ este soluţie.

• $x = 12k + 9$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k + 4) + (4k + 3) + (3k + 2) = 12k + 9$, care are soluţia $k = 0$, deci $x = 9$ este soluţie.

• $x = 12k + 10$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k + 5) + (4k + 3) + (3k + 2) = 12k + 10$, care are soluţia $k = 0$, deci $x = 10$ este soluţie.

• $x = 12k + 11$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia din enunţ revine la $(6k + 5) + (4k + 3) + (3k + 2) = 12k + 11$, care are soluţia $k = 1$, deci $x = 23$ este soluţie.

În concluzie, mulţimea soluţiilor este $\{0, 4, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 23\}$.

Problema 4. Fie P un punct oarecare pe diagonala (AC) a paralelogramului $ABCD$ şi $\{Q\} = AB \cap PD$. Demonstraţi că $\mathcal{S}(ABP) = \mathcal{S}(CPQ)$.

Ion Neaţă şi Andrei Eckstein

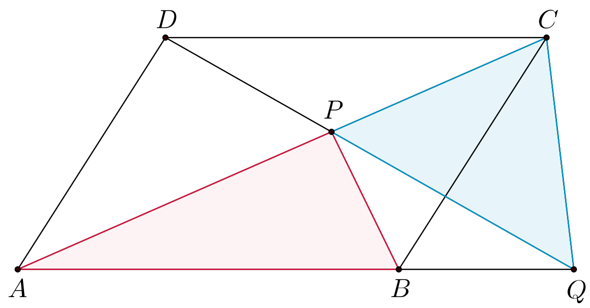
Soluţie:

Sunt două configuraţii posibile, în funcţie de poziţia punctului P pe diagonală: dacă P este mai aproape de A decât de C, atunci $Q \in (AB)$, în caz contrar $B \in [AQ]$. Demonstraţia de mai jos este valabilă în ambele cazuri.

Triunghiurile ABC şi CDA fiind congruente, şi înălţimile din B, respectiv D, ale celor două triunghiuri vor fi congruente, de unde

$$\mathcal{S}(ABP) = \frac{AP \cdot d(B, AP)}{2} = \frac{AP \cdot d(D, AP)}{2} = \mathcal{S}(ADP).$$

Rămâne să demonstrăm că $\mathcal{S}(ADP) = \mathcal{S}(CPQ)$, ceea ce este echivalent cu $\mathcal{S}(ADP) + \mathcal{S}(APQ) = \mathcal{S}(CPQ) + \mathcal{S}(APQ)$, deci cu $\mathcal{S}(ADQ) = \mathcal{S}(ACQ)$.
Ori această egalitate rezultă din faptul că $d(D, AQ) = d(C, AQ)$.
Cu aceasta, demonstraţia este încheiată.



Observaţii: În mod similar, în loc să adunăm $\mathcal{S}(APQ)$ la egalitatea $\mathcal{S}(ADP) = \mathcal{S}(CPQ)$, am fi putut aduna $\mathcal{S}(CDP)$.

Se poate formula şi demonstra şi o reciprocă:

Dacă punctele P şi Q de pe laturile (AC), respectiv (AB) ale triunghiului ABC sunt astfel încât $\mathcal{S}(ABP) = \mathcal{S}(CPQ)$, atunci simetricul lui B faţă de mijlocul lui (AC) se află pe dreapta PQ.