Problema 1. Determinaţi numerele reale a, b, c care satisfac simultan relaţiile:

$$a + b + ab = 8, \quad b + c + bc = 15, \quad c + a + ca = 24.$$

* * *

Soluţie: Fie a, b, c numere reale care verifică relaţiile date. Atunci $1+a+b+ab = 9$, $1+b+c+bc = 16$, $1+c+a+ca = 25$, adică $(1+a)(1+b) = 9$, $(1+b)(1+c) = 16$, $(1+c)(1+a) = 25$. Înmulţind aceste relaţii obţinem $(1+a)^2(1+b)^2(1+c)^2 = 3600$, deci $(1+a)(1+b)(1+c) \in \{-60,\ 60\}$.

• Dacă $(1+a)(1+b)(1+c) = -60$ obţinem $1+a = \dfrac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1+b)(1+c)} = \dfrac{-60}{16} = -\dfrac{15}{4}$, deci $a = -\dfrac{19}{4}$. Analog se obţin $b = -\dfrac{17}{5}$ şi $c = -\dfrac{23}{3}$.

• Dacă $(1+a)(1+b)(1+c) = 60$ obţinem $1+a = \dfrac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1+b)(1+c)} = \dfrac{60}{16} = \dfrac{15}{4}$, deci $a = \dfrac{11}{4}$. Analog se obţin $b = \dfrac{7}{5}$ şi $c = \dfrac{17}{3}$.

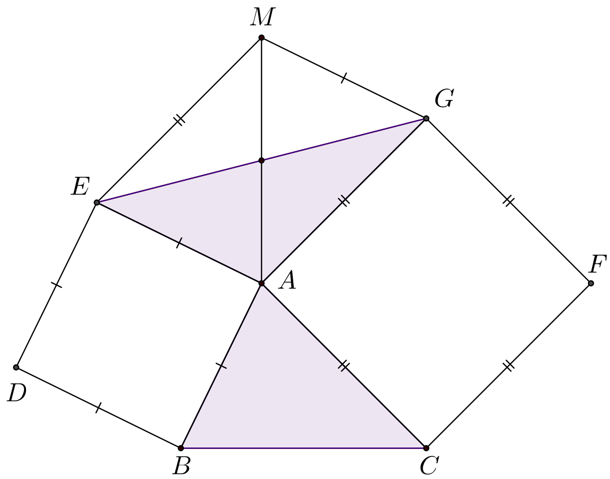
Ambele triplete găsite satisfac relaţiile din enunţ. Aşadar problema are două soluţii:

$$a = -\frac{19}{4},\ b = -\frac{17}{5},\ c = -\frac{23}{3} \quad \text{şi} \quad a = \frac{11}{4},\ b = \frac{7}{5},\ c = \frac{17}{3}.$$

Problema 2. Pe laturile AB şi AC ale unui triunghi ABC se construiesc, în exteriorul triunghiului, pătratele $ABDE$ şi respectiv $ACFG$. Demonstraţi că ariile triunghiurilor ABC şi AEG sunt egale.

* * *

Soluţie:
Fie M astfel ca $AEMG$ să fie paralelogram. Atunci $EM = AG = AC$, $EA = AB$ şi, calculând măsurile unghiurilor în jurul punctului A, $m(\widehat{AEM}) = 180^\circ - m(\widehat{EAG}) = m(\widehat{BAC})$, deci triunghiurile AEM şi BAC sunt congruente (LUL). Rezultă că $S(AEG) = \dfrac{1}{2} S(AEMG) = S(AEM) = S(ABC)$.



Observaţie: Afirmaţia din enunţ rezultă imediat dacă se cunoaşte formula ariei unui triunghi în funcţie de sinusul unuia dintre unghiurile triunghiului:

$$S(AEG) = \frac{AE \cdot AG \cdot \sin(\widehat{GAE})}{2}.$$

Dar $m(\widehat{GAE}) = 180^\circ - m(\widehat{BAC})$, deci $\sin(\widehat{GAE}) = \sin(\widehat{BAC})$ şi atunci, folosind că $AE = AB$ şi $AG = AC$, avem

$$S(AEG) = \frac{AE \cdot AG \cdot \sin(\widehat{GAE})}{2} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})}{2} = S(BAC).$$

Problema 3. Colorăm fiecare număr natural nenul cu una din culorile roşu sau albastru. Se ştie că oricare două numere de culori diferite au suma un număr albastru, iar produsul un număr roşu. Ce culoare are produsul a două numere roşii? Dar suma a două numere roşii?

* * *

Soluţia 1:
Dacă toate numerele sunt colorate cu roşu atunci suma şi produsul oricăror două numere roşii sunt tot numere roşii.
Dacă există şi numere albastre, fie r_1, r_2 două numere roşii arbitrare, iar a un număr albastru. Atunci $(r_1 + a)r_2$ este produsul dintre numărul $r_1 + a$ (care este albastru) şi numărul roşu r_2, deci este număr roşu. Pe de altă parte, $(r_1 + a)r_2 = r_1r_2 + ar_2$ este suma dintre r_1r_2 şi numărul roşu ar_2. Dacă r_1r_2 ar fi albastru, atunci adunându-l cu numărul roşu ar_2 ar trebui să obţinem un număr albastru,

ori ştim că $r_1r_2 + ar_2 = (r_1 + a)r_2$ este roşu. Prin urmare, produsul a două numere arbitrare roşii, r_1 şi r_2, trebuie să fie roşu.

Fie n este cel mai mic număr roşu. Din ipoteză şi din cele demonstrate mai sus rezultă că n, înmulţit cu orice alt număr, fie el roşu sau albastru, dă tot un număr roşu. Aşadar toţi multiplii lui n sunt roşii. Cum toate numerele mai mici decât n (dacă există) sunt albastre, un număr nedivizibil cu n se scrie $kn + r$, cu $0 < r < n$ număr albastru şi kn număr roşu, deci $kn + r$ este albastru. Prin urmare singurele colorări care au proprietatea din enunţ pot fi descrise astfel: multiplii celui mai mic număr roşu sunt tot roşii, celelalte numere sunt albastre. Atunci este evident că suma a două numere roşii este tot roşie deoarece suma a doi multipli de n este tot multiplu de n.

Soluţia 2: (*Paul Tîrlişan*)
Fie a şi b două numere roşii. Presupunem că ab este albastru. Atunci $b + ab = (a + 1)b$ este albastru, deci $(a + 1)b + b = (a + 2)b$ este albastru, de unde rezultă că în general $(a + k)b$ este albastru oricare ar fi k natural. Pentru $k = a^2$ obţinem că $a(a + 1)b$ este albastru. Cum $(a + 1)b$ este albastru şi a este roşu, rezultă că $a(a + 1)b$ este roşu, contradicţie. Deci ab este roşu.

Presupunem că $a + b$ este albastru. Atunci $(a + b) + a = 2a + b$ este albastru, deci $(2a + b) + a = 3a + b$ este albastru ş.a.m.d.; în general $ka + b$ este albastru oricare ar fi k natural nenul. Atunci, pentru un k fixat, avem că $(ka + b) + b = ka + 2b$ este albastru, apoi $(ka + 2b) + b = ka + 3b$ este albastru şi în general $ka + pb$ este albastru, oricare ar fi k şi p naturale nenule. Pentru $k = p = a$ obţinem că $a(a+b)$ este albastru, dar din a roşu şi $a + b$ albastru rezultă $a(a + b)$ roşu, contradicţie.

Observaţia 1: Răspunsul poate fi uşor ghicit găsind o colorare particulară a numerelor care satisface condiţiile din enunţ. De exemplu, se pot colora numerele pare cu roşu, iar cele impare cu albastru. Însă a raţiona pe acest caz particular este greşit: în principiu este posibil să existe şi alte colorări decât aceasta. (Şi chiar există: dacă n este un număr natural nenul, putem colora cu roşu toate numerele divizibile cu n şi cu albastru cele care nu sunt divizibile cu n. Evident, suma dintre un număr divizibil cu n şi un număr care nu este divizibil cu n este un număr care nu este divizibil cu n, în vreme ce produsul unor asemenea numere va fi divizibil cu n; pentru $n = 1$ obţinem colorarea amintită la începutul soluţiei, anume cea în care toate numerele sunt colorate cu roşu. De fapt, aşa cum am demonstrat în Soluţia 1, acestea sunt singurele colorări posibile.)

Observaţia 2: Colorările de mai sus arată că nu putem stabili culoarea produsului sau a sumei a două numere albastre: suma a două numere nedivizibile cu n poate să fie sau să nu fie divizibilă cu n şi la fel şi produsul.

Întrebarea privind produsul a două numere roşii este problema B. 3652. din cadrul *Concursului KöMaL, Ungaria,* 2003.

Problema 4. Fie $k \geq 1$ un număr întreg. Un operator de telefonie mobilă îi propune fiecărui client să aleagă k numere cu care comunicarea este gratuită (dacă o persoană A alege numărul lui B, atunci apelurile lui A către B şi cele ale lui B către A sunt gratuite.) Considerăm un grup de n persoane.
a) Dacă $n \geq 2k + 2$, demonstraţi că există două persoane care nu pot comunica gratuit.
b) Dacă $n = 2k + 1$, demonstraţi că cele n persoane pot alege numerele gratuite astfel încât să vorbească gratuit între ele.

test prin corespondenţă, Franţa, 2014

Soluţie: Vom spune că o persoană A a ales o persoană B dacă numărul lui B face parte dintre numerele alese de A cu care comunicarea să fie gratuită.
a) Deoarece fiecare persoană poate alege cel mult k alte persoane, există cel mult kn perechi de persoane care pot comunica gratuit. Ori numărul total de perechi de persoane este $\frac{n(n-1)}{2}$, (fiecare din cele n persoane este în pereche cu celelalte $n-1$, deci sunt $n(n-1)$ perechi, însă fiecare pereche a fost numărată de două ori) şi $\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n(2k+1)}{2} > nk$. Astfel, numărul total de perechi este mai mare decât numărul de perechi care pot comunica gratuit, deci există măcar o pereche de persoane care nu pot comunica gratuit.
b) Să plasăm cele $2k + 1$ persoane pe un cerc. Fiecare persoană alege să comunice gratuit cu cele k persoane situate după ea pe cerc. Astfel fiecare persoană X va putea comunica gratuit cu toată lumea, celelalte k persoane, cele pe care nu le-a ales X, alegând-o ei pe X.