Problema 1. Se ştie că numărul $N = \dfrac{200!}{100! \cdot 100!}$ este număr natural. Care e cel mai mare număr prim de două cifre care îl divide pe N?

Concursul AIME, 1983

Soluţie:
Răspunsul este 61.
• Factorul prim 61 apare la puterea a treia în descompunerea în factori primi a numărătorului. (Printre factorii $1, 2, 3, \ldots, 200$, divizibili cu 61 sunt 61, 122 şi 183 şi niciunul dintre aceştia nu este divizibil cu 61^2.) Totodată, factorul prim 61 apare la puterea a doua în descompunerea în factori primi a numitorului: dintre factorii $1, 2, 3, \ldots, 100$, care apar, fiecare, de câte două ori, numai 61 este divizibil cu 61. Prin urmare, numărul N este divizibil cu 61.
• Arătăm acum că N nu este divizibil cu niciun număr prim p de două cifre mai mare ca 61. Să observăm mai întâi că următorul număr prim, după 61, este 67. Aşadar $67 \leq p \leq 99$. Factorul prim p apare la puterea a doua în descompunerea în factori primi a numărătorului. (Printre factorii $1, 2, 3, \ldots, 200$, divizibili cu p sunt p şi $2p$ - căci $3p > 200$ - şi niciunul dintre aceştia nu este divizibil cu p^2.) Pe de altă parte, factorul prim p apare tot la puterea a doua şi în descompunerea în factori primi a numitorului: dintre factorii $1, 2, 3, \ldots, 100$, care apar, fiecare, de câte două ori la numitor, numai p este divizibil cu p, deoarece $2p > 100$ este prea mare.) Prin urmare, numărul N nu este divizibil cu niciun număr prim p, $61 < p < 100$.

În concluzie, cel mai mare număr cu proprietatea dorită este 61.

Remarci:
1. Pentru $k, n \in \mathbb{N}$ cu $1 \leq k \leq n$, numărul $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, care se citeşte „*combinări de n luate câte k*" şi se notează C_n^k sau $\dbinom{n}{k}$, este intotdeauna număr natural şi reprezintă numărul submulţimilor cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente. (Veţi învăţa despre aceste numere în clasa a X-a.) Numărul N din problema este, aşadar, C_{200}^{100}.

2. Pentru a arăta că N este într-adevăr număr natural, se poate folosi *Formula lui Legendre*:

Exponentul, notat $v_p(n!)$, al numărului prim p în descompunerea în factori primi a lui $n!$ este dat de următoarea sumă (infinită, dar în care doar primii câţiva termeni sunt nenuli)

$$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

Pentru a arăta că $N = \dfrac{200!}{100! \cdot 100!} \in \mathbb{N}$, trebuie să arătăm că, pentru orice număr prim p, avem $v_p\big((2n)!\big) - 2 \cdot v_p(n!) \geq 0$, ceea ce rezultă din formula de mai sus.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale a şi b care verifică egalitatea

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = 1.$$

Olimpiadă Moldova, 2016

Soluţie:
Eliminând numitorii, relaţia din enunţ revine la $a^2 + a + b^2 + b = ab + a + b + 1$, adică la $a^2 + b^2 = ab + 1$. Dacă $a = 0$, atunci $b = 1$, iar dacă $b = 0$ atunci $a = 1$. Dacă $a \geq b > 0$, atunci $a^2 \geq ab$ şi $b^2 \geq 1$, deci $a^2 + b^2 \geq ab + 1$, cu egalitate numai dacă $a = b = 1$. Analog în cazul $b \geq a \geq 1$.
Aşadar soluţiile sunt $(a, b) \in \{(1, 0),\ (0, 1),\ (1, 1)\}$.

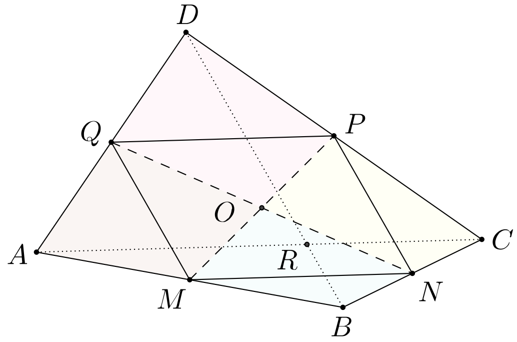
Problema 3. Patru fraţi au moştenit un teren în forma unui patrulater convex. Unind mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului, moştenirea este împărţită în patru patrulatere. Primii trei fraţi au moştenit terenuri de arii 360, 720 şi 900 m^2. Care este suprafaţa zonei moştenite de cel de-al patrulea frate?

Concursul KöMaL, problema B.3628, martie 2003

Soluţie:
În demonstraţie vom folosi următoarea lemă:
Lemă. Dacă B_1 şi C_1 sunt mijloacele laturilor (AC) şi (AB) ale triunghiului ABC, atunci aria triunghiului AB_1C_1 este un sfert din aria triunghiului ABC.
Acest lucru rezultă din asemănarea triunghiurilor AB_1C_1 şi ABC (raportul de asemănare fiind 1/2) sau considerând şi punctul A_1 - mijlocul laturii (BC) şi constatând că liniile mijlocii împart suprafaţa triunghiului în 4 triunghiuri congruente.
Acest lucru îl ilustăm nu printr-o figură cum o facem de obicei, ci prin fotografia unui pavaj roman din marmură datând din secolul I:

Să trecem acum la rezolvarea problemei.

Fie $ABCD$ un patrulater convex, M, N, P şi Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ respectiv $[DA]$ şi $\{O\} = MP \cap NQ$.
Notám cu S_1, S_2, S_3 şi S_4 ariile părţilor moştenite de cei 4 fraţi: $S_1 = \mathscr{A}_{AMOQ}$, $S_2 = \mathscr{A}_{BNOM}$, $S_3 = \mathscr{A}_{CPON}$ şi $S_4 = \mathscr{A}_{DQOP}$. Ştim că $\{360, 720, 900\} \subset \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.
Deoarece $NPQM$ este paralelogram ($[NP]$ şi $[QM]$ sunt paralele cu $[BD]$ şi au jumătate din lungimea acestuia), ariile triunghiurilor MON, NOP, POQ şi QOM sunt egale. Să notăm această arie cu s. Folosind lema de mai sus, putem scrie că: $S_1 + S_3 = \mathscr{A}_{AMQ} + \mathscr{A}_{QOM} + \mathscr{A}_{CPN} + \mathscr{A}_{NOP} = \frac{1}{4}\mathscr{A}_{ABD} + s + \frac{1}{4}\mathscr{A}_{CBD} + s = \frac{1}{4}\mathscr{A}_{ABCD} + 2s$.
Analog se arată că şi $S_2+S_4 = \frac{1}{4}\mathscr{A}_{ABCD}+2s$, deci că $S_1+S_3 = S_2+S_4$. Deducem că aria zonei (exprimată în metri pătraţi) moştenite de cel de-al patrulea frate trebuie să fie $360 + 720 - 900 = 180$, $360 + 900 - 720 = 540$ sau $720 + 900 - 360 = 1260$.
În aparenţă, problema are trei soluţii. Dar oare sunt posible toate cele trei situaţii?
Să mai observăm că $\mathscr{A}_{ABCD} = S_1 + S_3 + S_2 + S_4 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{ABCD} + 4s$, deci $s = \frac{1}{8}(S_1+S_2+S_3+S_4)$. Deoarece fiecare din ariile moştenite de cei patru fraţi trebuie să fie mai mare ca s, deducem că $\min\{S_1, S_2, S_3, S_4\} > \frac{1}{8}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$.
În primul caz, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2160 > 8 \cdot 180$, deci acest caz nu este posibil.
În cazul al treilea, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 3240 > 8 \cdot 360$, deci nici acest caz nu este posibil.
Rămâne cel de-al doilea caz, cel în care fratele al patrulea a moştenit o suprafată de 540 de metri pătraţi.



Remarcă: Scenariul din cazul al doilea se poate într-adevăr realiza.
Vom demonstra că există un teren în formă de patrulater convex, $ABCD$, pentru

care $S_1 = 360$, $S_2 = 720$, $S_3 = 900$ şi $S_4 = 540$.
În acest caz am avea $s = \frac{1}{8}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = 315$, apoi $\mathscr{A}_{AMQ} = S_1 - s = 45$, $\mathscr{A}_{BNM} = S_2 - s = 405$, $\mathscr{A}_{CPN} = S_3 - s = 585$, $\mathscr{A}_{DQP} = S_4 - s = 225$. Deducem că $\mathscr{A}_{ABD} = 4\mathscr{A}_{AMQ} = 180$, $\mathscr{A}_{BCA} = 1620$, $\mathscr{A}_{CDB} = 2340$ şi $\mathscr{A}_{DAC} = 900$.
Dacă notăm cu R punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului, atunci ar trebui să avem că $\frac{AR}{RC} = \frac{\mathscr{A}_{ARB}}{\mathscr{A}_{CRB}} = \frac{\mathscr{A}_{ARD}}{\mathscr{A}_{CRD}} = \frac{\mathscr{A}_{ABD}}{\mathscr{A}_{CDB}} = \frac{180}{2340} = \frac{1}{13}$ şi $\frac{BR}{RD} = \frac{\mathscr{A}_{ARB}}{\mathscr{A}_{ARD}} = \frac{\mathscr{A}_{BCR}}{\mathscr{A}_{DCR}} = \frac{\mathscr{A}_{ABC}}{\mathscr{A}_{ADC}} = \frac{1620}{900} = \frac{9}{5}$.
Orice patrulater în care diagonalele se împart una pe cealaltă în raport $1 : 13$, respectiv $9 : 5$, poate fi tranformat printr-o asemănare într-un patrulater cu aria totală 2520. Acesta are proprietatea dorită.

Problema 4. Am introdus 100 de mingi în 100 de cutii şi nu am pus toate mingile într-o singură cutie (dar este posibil ca unele cutii să fi rămas goale). Demonstraţi că există un număr natural k, cu $1 \leq k < 100$, astfel încât să putem alege k cutii care să conţină, împreună, exact k mingi.

* * *

Soluţie:
Dacă avem o cutie care conţine o singură minge, problema este rezolvată: putem lua $k = 1$ şi alege respectiva cutie.
Dacă fiecare cutie este fie goală, fie conţine cel puţin două mingi, rezultă că există cel puţin 50 de cutii goale. Pe de altă parte, cum există cel puţin două cutii care primesc mingi, va exista o cutie care să conţină cel mult 50 de mingi. Putem lua k drept numărul mingilor dintr-o astfel de cutie, iar cele k cutii le putem alege astfel: cutia care conţine cele k mingi, plus $k - 1$ dintre cutiile goale. (Cum $k - 1 < 50$, dispunem de $k - 1$ cutii goale.) Aceste k cutii vor avea, împreună, exact k mingi.