Problema 1. Determinaţi numărul natural nenul n pentru care

$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3)=2015(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$

Paloma Dinculescu

Soluţie:
Notând $S = 1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3)$, avem că $5S = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot(5-0)+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot(6-1)+3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot(7-2)+\ldots+(n-1)n(n+1)(n+2)\cdot[(n+3)-(n-2)]+n(n+1)(n+2)(n+3)[(n+4)-(n-1)] = (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5-0\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4)+(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6-1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)+(3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7-2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)+\ldots+[(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)]+[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)] = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.
Pentru a vedea mai bine cum s-au redus termenii din suma de mai sus, putem fie observa că al treilea termen după fiecare termen pozitiv (cu excepţia ultimului termen pozitiv) este chiar opusul său, sau, eventual, putem împărţi cu -1 şi atunci termenii care se reduc devin vecini:
$-5S = (0\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)+(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)+(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6-3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)+\ldots+[(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)]+[(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)-n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)] = 0\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4-n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = -n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, deci

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}.$$

Prin urmare ecuaţia din enunţ revine la

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} = 2015(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

şi are soluţia unică $n = 5\cdot2015 = 10075$.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule x, y, z care verifică relaţia $xy+yz+zx-xyz=3$.

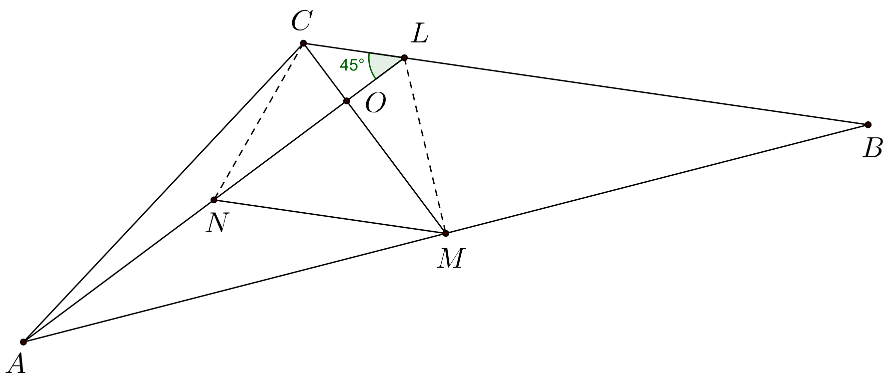
* * *

Soluţie: Să căutăm mai întâi soluţii cu $x\le y\le z$. Dacă $x\ge3$, atunci $3+xyz>xyz\ge 3yz\ge xy+yz+zx$ deci egalitatea nu poate avea loc. Aşadar trebuie ca $x=1$ sau $x=2$.
Dacă $x=1$, ajungem la $y+yz+z-yz=3$, adică la $y+z=3$, cu soluţia $y=1$, $z=2$.
Dacă $x=2$, relaţia din enunţ revine la $2y+yz+2z-2yz=3$, adică la $(y-2)(z-2)=1$, cu soluţia $y=z=3$.
Tratând şi celelalte ordini posibile ale variabilelor x, y, z obţinem în final soluţiile: $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$, $(2,3,3)$, $(3,2,3)$ şi $(3,3,2)$.

Problema 3. Punctul L de pe latura (BC) a unui triunghi ABC are proprietatea că $AL=2CM$, unde M este mijlocul laturii (AB). Ştiind că măsura unghiului $\angle ALC$ este de $45°$, demonstraţi că dreptele AL şi CM sunt perpendiculare.

Turneul Oraşelor, 2014

Soluţie:
Fie N mijlocul lui (AL). Atunci $AN = NL = CM$. Pe de altă parte, MN este linie mijlocie în triunghiul ABL, deci $MN \parallel LB$. Rezultă că patrulaterul $CNML$ este trapez (eventual paralelogram). În plus, diagonalele acestuia sunt congruente, deci $CNML$ este trapez isoscel (eventual dreptunghi). Din congruenţa (LLL) a triunghiurilor CML şi LNC rezultă atunci că $m(\angle MCL) = m(\angle NLC) = 45°$. Notând $\{O\} = AL \cap CM$, obţinem din triunghiul COL că $m(\angle COL) = 90°$, adică $AL \perp CM$.



Problema 4. Un număr natural n se numeşte *fidel* dacă există numerele naturale $a < b < c$ astfel încât $a \mid b$, $b \mid c$ şi $a + b + c = n$.
a) Demonstraţi că există un număr finit de numere naturale care nu sunt fidele.
b) Aflaţi suma tuturor numerelor naturale care nu sunt fidele.

Olimpiadă India, 2011

Soluţie: (*Dan Schwarz*, pe AoPS)
Dacă n este impar, atunci n se scrie $n = 2k + 1 = 1 + 2 + 2(k - 1)$, deci este fidel dacă $k \geq 3$.
$2^4 = 16$ este fidel deoarece $16 = 1 + 3 + 12 = 1 + 5 + 10$.
Dacă n este fidel, atunci, evident, orice multiplu al lui n este fidel; putem scrie $mn = m(a + b + c) = ma + mb + mc$.

Prin urmare, singurele numere care ar putea să nu fie fidele sunt $n = 0$ şi cele de forma $n = 2^\ell(2k + 1)$, cu $\ell = 0, 1, 2$ şi $k = 0, 1, 2$, adică

$$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20, 24, 40\}.$$

Deoarece $10 = 1+3+6$ este fidel, rezultă că la fel sunt şi 20 şi 40. Dat fiind că un număr fidel $n = a + b + c \geq 1 + 2 + 4 = 7$, rezultă că $1, 2, 3, 4, 5, 6$ nu sunt fidele. Mai rămân în dubiu doar numerele $8, 12$ şi 24, pentru care o simplă verificare arată că nu sunt fidele.
În concluzie, suma numerelor care nu sunt fidele este $0+1+2+3+4+5+6+8+12+24 = 65$.