Problema 1. Câte dintre numerele de 2016 cifre au suma cifrelor pară?

* * *

Soluţie.
În total, sunt $9 \cdot 10^{2015}$ numere de 2016 cifre. Putem justifica acest lucru în (cel puţin) două moduri:
1. Prima cifră poate fi oricare din cele 9 cifre nenule; ea poate fi aleasă în 9 moduri. Fiecare din următoarele 2015 cifre poate fi oricare din cele 10 cifre, deci poate fi aleasă în 10 moduri. Conform principiului produsului, în total sunt $9 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\text{de 2015 ori}}$ numere de 2016 cifre.
2. Numerele de 2016 cifre sunt cele cuprinse între 10^{2015} şi $10^{2016}-1$, adică sunt în număr de $(10^{2016}-1)-10^{2015}+1 = 10^{2016}-10^{2015} = 10^{2015}(10-1) = 9 \cdot 10^{2015}$.

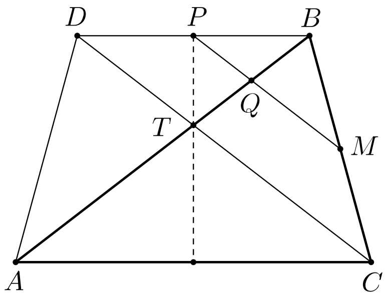
Vom demonstra că exact jumătate din aceste numere au suma cifrelor pară. Vom grupa numerele în grupe de câte 10 numere consecutive. Numerele dintr-o aceeaşi grupă se caracterizează prin faptul că primele 2015 cifre sunt aceleaşi, doar ultima variază (de la 0 la 9). Indiferent dacă suma primelor 2015 cifre este pară sau impară, deoarece 5 dintre cifrele de la 0 la 9 sunt pare, iar 5 sunt impare, dintre cele 10 numere ce formează un grup, 5 vor avea o paritate a sumei cifrelor, iar celelalte 5 vor ave cealaltă paritate a sumei cifrelor. Acest lucru fiind valabil pentru fiecare grup, rezultă că exact jumătate din numerele de 2016 cifre au suma cifrelor pară, adică sunt $\dfrac{9 \cdot 10^{2015}}{2} = 45 \cdot 10^{2014}$ numere cu această proprietate.

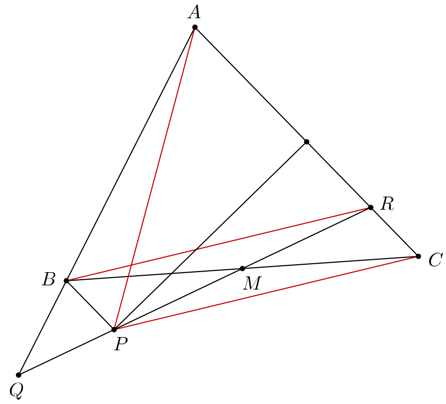
Problema 2. Dacă M este mijlocul laturii (BC) a triunghiului ABC, P este proiecţia lui B pe mediatoarea segmentului $[AC]$, iar $\{Q\} = PM \cap AB$, demonstraţi că triunghiul QPB este isoscel.

Arseniy Akopyan, Concursul Sharygin, 2012

Soluţia 1: (Oficială din concurs, vezi figura din stânga) [1]
Fie D simetricul lui B fată de mediatoarea lui $[AC]$ şi $\{T\} = AC \cap BD/$ Atunci $ACBD$ este un trapez isoscel, deci BDT este triunghi isoscel. Cum $[PM]$ este linie mijlocie în acest triunghi, de unde rezultă că şi triunghiul QPB este isoscel.

[1] https://pregatirematematicaolimpiadejuniori.files.wordpress.com/2016/07/solutii-faza-22.pdf





Soluţia 2: (vezi figura din dreapta)
Fie $\{R\} = PM \cap AC$. Cum $BP \parallel AC$ (ambele perpendiculare pe mediatoarea lui $[AC]$) şi $BM = MC$, triunghiurile BMP şi CMR sunt congruente ULU (avem $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle MCR$ alterne interne şi $\sphericalangle BMP \equiv \sphericalangle CMR$ opuse la vârf). Deducem că $BPCR$ este paralalelogram, deci $PC = BR$. Dar, cum P este pe mediatoarea lui $[AC]$, avem $PA = PC$, de unde deducem că $PA = BR$. Rezultă că trapezul $ABPR$ este isoscel, de unde rezultă imediat concluzia.

Problema 3. Arătaţi că

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)} < \frac{1}{2},$$

pentru orice număr natural nenul n.

Olimpiadă Polonia

Soluţie:
Notând cu S suma din membrul stâng, putem scrie că

$$2S = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{4}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)} =$$

$$\frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{5-1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{7-1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{(2n+1)-1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)} =$$

$$1 - \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)} -$$

$\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)} = 1 - \dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)} < 1$, de unde rezultă că $S < \dfrac{1}{2}$.

Problema 4. Numerele $1, 2, \ldots, 2016$ sunt scrise pe tablă, într-o anumită ordine, fiecare din ele exact o dată. Între oricare două numere vecine pe tablă se scrie modulul diferenţei dintre cele două numere, pe tablă fiind scrise astfel 2015 numere noi. Se şterg de pe tablă cele 2016 numere iniţiale, după care procesul se reia pentru cele 2015 numere rămase pe tablă: se scriu modulele diferenţelor de câte două numere vecine, după care cele 2015 numere scrise pe tablă la etapa anterioară se şterg. Procesul se repetă până când, la sfârşit, pe tablă rămâne un singur număr. Care este cea mai mare valoare posibilă pe care o poate avea numărul rămas pe tablă?

* * *

Soluţie: Valoarea celui mai mare număr scris pe tablă nu poate creşte de la o etapă la alta. Mai mult, după prima etapă, cel mai mare număr rămas pe tablă va fi cel mult 2015 (şi asta dacă 1 şi 2016 sunt vecine pe tablă). După prima etapă, cel mai mare număr scris pe tablă este aşadar cel nult 2015, iar cel mai mic este cel puţin 1, deci după etapa a doua cel mai mare număr de pe tablă este cel mult 2014. Prin urmare, numărul final este cel mult 2014.

Pe de altă parte, dacă ordinea iniţială a numerelor este $2016, 1, 2, 3, \ldots, 2015$, după prima etapă vor rămâne pe tablă numerele $2015, 1, 1, 1, \ldots, 1$, iar după etapa a doua vor rămâne $2014, 0, 0, 0, \ldots 0$. De aici înainte, numerele de pe tablă vor fi 2014 urmat de tot mai puţine cifre de 0, până când la sfârşit rămâne 2014.

Am demonstrat aşadar că cea mai mare valoare posibilă a numărului care rămâne pe tablă este 2014.