Problema 1. Numitorii a două fracţii ireductibile sunt 600 şi respectiv 700. Care este cea mai mică valoare posibilă a numitorului sumei celor două fracţii (atunci când o scriem sub forma unei fracţii ireductibile)?

test de selecţie Franţa, 2013

Soluţie:
Fie $\frac{a}{600}$ şi $\frac{b}{700}$ cele două fracţii ireductibile. Atunci a este prim cu 600, adică este prim cu 2, cu 3 şi cu 5, iar b este prim cu 700, adică este prim cu 2, cu 5 şi cu 7. Suma celor două fracţii este $\frac{a}{600} + \frac{b}{700} = \frac{7a+6b}{4200}$. Dar $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, iar această fracţie s-ar putea simplifica numai cu un divizor al lui 4200. Ea nu se poate simplifica cu 2 (căci atunci a ar trebui să fie par), nici cu 3 (pentru că asta ar implica $3 \mid a$) şi nici cu 7 (ar rezulta că $7 \mid b$). Rămâne că fracţia se poate simplifica cel mult cu 25, aşadar cel mai mic numitor care s-ar putea eventual obţine este $4200 : 25 = 168$.
Pe de altă parte, numitorul 168 chiar se poate obţine, de exemplu dacă $a = 1$ şi $b = 3$.
Prin urmare minimul căutat este 168.

Problema 2. Demonstraţi că pentru orice numere reale x, y are loc inegalitatea
$$|x-y| + 2 \leq |x-1| + |y-1| + |x+1| + |y+1|.$$

* * *

Soluţia 1:
Din inegalitatea modulului avem:
$$|x-1| + |y-1| = |x-1| + |1-y| \geq |(x-1) + (1-y)| = |x-y|,$$
$$|x+1| + |y+1| = |x+1| + |-1-y| \geq |(x+1) + (-1-y)| = |x-y|,$$
$$|x-1| + |x+1| = |1-x| + |x+1| \geq |(1-x) + (x+1)| = 2,$$
$$|y-1| + |y+1| = |1-y| + |y+1| \geq |(1-y) + (y+1)| = 2,$$
care, prin adunare şi împărţire cu 2, dau inegalitatea dorită.
Egalitatea are loc dacă $x = -1$, $y = 1$ sau dacă $x = 1$, $y = -1$.

Soluţia 2:
Din motive de simetrie putem presupune că $x \leq y$. Distingem atunci următoarele cazuri:
1. $x \leq y \leq -1$
2. $x \leq -1 < y \leq 1$
3. $x \leq -1 < 1 < y$

4. $-1 < x \leq y \leq 1$
5. $-1 < x \leq 1 < y$
6. $1 < x \leq y$.

În cazul 1. inegalitatea revine la $y - x + 2 \leq -2x - 2y$ adică $3y + x + 2 \leq 0$, ceea ce este evident căci $3x + y \leq -3 - 1 = -4 < -2$.
În cazul 2. inegalitatea revine la $y - x + 2 \leq -2x + 2$, adică la $x + y \leq 0$ ceea ce este evident căci $x + y \leq -1 + 1 = 0$ (cu egalitate dacă $x = -1$, $y = 1$).
În cazul 3. inegalitatea revine la $y - x + 2 \leq -2x + 2y$, adică la $x + 2 - y \leq 0$ ceea ce este evident căci $x + 2 - y < -1 + 2 - 1 = 0$.
În cazul 4. inegalitatea revine la $y - x + 2 \leq 4$, adică la $y - x \leq 2$ ceea ce este evident căci $y - x < 1 + 1 = 2$.
În cazul 5. inegalitatea revine la $y - x + 2 \leq 2 + 2y$, adică la $x + y \geq 0$ ceea ce este evident căci $x + y > -1 + 1 = 0$.
În cazul 6. inegalitatea revine la $y - x + 2 \leq 2x + 2y$, adică la $3x + y \geq 2$ ceea ce este evident căci $3x + y > 3 + 1 > 2$.

Problema 3. Două armate, A şi B, sunt angajate într-un război cu un număr total de 1000 de soldaţi. Cele două armate se atacă alternativ. La orice atac, fiecare soldat viu al armatei care atacă împuşcă un soldat din armata adversă. (Soldaţi diferiţi împuşcă soldaţi diferiţi, iar soldaţii împuşcaţi nu mai participă în continuare la război.) Războiul s-a încheiat (nu neapărat prin eliminarea uneia dintre părţi) după trei atacuri: mai întâi a atacat A, apoi B şi la sfârşit din nou A. Care este cel mai mic număr posibil de supravieţuitori?

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2011

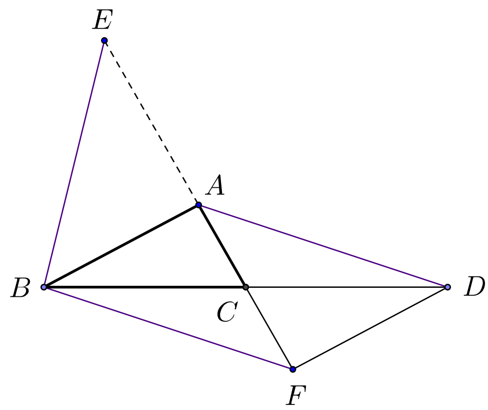
Soluţie:
Pentru ca de fiecare dată soldaţii din armata care atacă să poată împuşca soldaţi diferiţi trebuie ca armata care atacă să aibă mereu cel mult la fel de mulţi soldaţi ca şi armata opusă.
Dacă armata A are n soldaţi iar armata B are $1000 - n$ soldaţi, trebuie ca $n \leq 500$.
După primul atac al armatei A în armata B vor rămâne $1000 - 2n$ soldaţi.
Armata B, care a rămas cu $1000 - 2n$ soldaţi, atacă armata A care are n soldaţi, deci, potrivit observaţiei de la început, trebuie ca $1000 - 2n \leq n$, adică $n \geq 334$.
Armata A va rămâne cu $n - (1000 - 2n) = 3n - 1000$ soldaţi.
Armata A, cu $3n - 1000$ soldaţi, atacă armata B, care numără $1000 - 2n$ soldaţi. Trebuie aşadar ca $3n - 1000 \leq 1000 - 2n$, adică $n \leq 400$. După atac, din armata B rămân $1000 - 2n - (3n - 1000) = 2000 - 5n$ supravieţuitori.
Numărul total de supravieţuitori este $(3n - 1000) + (2000 - 5n) = 1000 - 2n$ care este minim atunci când n este maxim, adică pentru $n = 400$.
În acest caz războiul va fi supravieţuit de 200 de soldaţi.

Într-adevăr, dacă A are 400 de soldaţi care atacă armata B care are 600, după primul atac armata B rămâne cu 200 de soldaţi; la al doilea atac armata A rămâne şi ea cu 200 de soldaţi care, la cel de-al treilea atac, lichidează toată armata B. Supravieţuiesc astfel 200 de soldaţi din armata A.

Problema 4. Latura $[BC]$ a triunghiului ABC este prelungită dincolo de C până în D, astfel ca $CD = BC$. Latura $[CA]$ este prelungită dincolo de A până în E, astfel ca $AE = 2CA$. Demonstraţi că, dacă $AD = BE$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

David Monk, EGMO 2013, problema 1

Soluţie: Fie F simetricul lui A faţă de C. Atunci $ABFD$ este paralelogram şi $BF = AD = BE$. În plus, A este mijlocul lui $[EF]$, deoarece $AF = 2AC$, prin urmare $[AB]$ este şi înălţime în triunghiul isoscel EBF. Aşadar $AB \perp AC$.



Alte soluţii se pot consulta aici.