Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere naturale distincte, atunci se notează cu d cel mai mare divizor comun al acestora. Determinaţi cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul d în cazul în care $a+b+c=2015$.

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2015

Soluţie:
Fie a, b, c numere naturale distincte cu suma 2015, iar d cel mai mare divizor comun al celor trei numere. Atunci $a=dx$, $b=dy$, $c=dz$, cu x, y, z numere naturale distincte. Trebuie ca $d(x+y+z)=2015$, deci trebuie ca d să îl dividă pe 2015. Dar x, y, z, fiind distincte, sunt cel puţin $0, 1$ şi 2, deci $d \leq \frac{2015}{3}$. Cel mai mare divizor al lui $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ care are această proprietate este $d = 13 \cdot 31 = 403$. În acest caz $x+y+z=5$. De exemplu, x, y, z ar putea fi 0, 1, respectiv 4, deci $a=0$, $b=403$, $c=1612$ este un exemplu care arată că valoarea 403, teoretic maximă, este într-adevăr atinsă.

Problema 2. Fie a, b şi c numere reale astfel încât $|a-b| \geq |c|$, $|b-c| \geq |a|$ şi $|c-a| \geq |b|$. Demonstraţi că unul dintre numerele a, b şi c este egal cu suma celorlalte două numere.

test Franţa pentru juniori, 2015

Soluţia 1:
Relaţiile date sunt simetrice în variabilele a, b, c. În plus, relaţiile nu se modifică dacă schimbăm simultan semnele tuturor variabilelor. Putem astfel să restrângem studiul la cazurile:
I. toate variabilele nenegative şi
II. două variabile sunt nenegative iar cea de-a treia negativă.
Din simetrie, putem presupune $a \geq b \geq c$, astfel că vom avea de studiat cazurile: **I.** $a \geq b \geq c \geq 0$ şi **II.** $a \geq b \geq 0 \geq c$.
Vom demonstra că în ambele cazuri avem $b = a + c$.
• Dacă $a \geq b \geq c \geq 0$, relaţia a doua devine $b-c \geq a$, dar cum $b \geq b-c \geq a \geq b$, deducem că trebuie să avem egalitate în toate aceste inegalităţi, deci $b-c=a$, de unde $b=a+c$. (Rezultă şi că $b=b-c$, adică $c=0$, şi că $a=b$.)
• Dacă $a \geq b \geq 0 \geq c$, atunci primele două relaţii devin $a-b \geq -c$ şi $b-c \geq a$, adică $b \leq a+c$, respectiv $b \geq a+c$, de unde $b=a+c$.

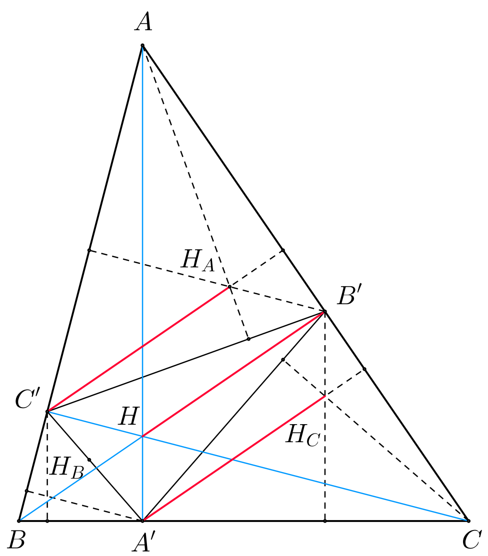
Soluţia 2: (cu ,,calcul prescurtat"; urmează să faceţi)
Relaţiile din enunţ se scriu echivalent, prin ridicare la pătrat, $(a-b)^2-c^2 \geq 0$, $(b-c)^2-a^2 \geq 0$, $(c-a)^2-b^2 \geq 0$, adică
$(a-b+c)(a-b-c) \geq 0$, $(b-c+a)(b-c-a) \geq 0$, $(c-a+b)(c-a-b) \geq 0$.
Înmulţind aceste inegalităţi, obţinem $-[(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]^2 \geq 0$.

Cum pe de altă parte, orice pătrat este un număr nenegativ, rezultă că $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$, ceea ce arată că unul dintre numere trebuie să fie suma celorlalte două.

Problema 3. Fie AA', BB', CC' înălţimile triunghiului ABC. Arătaţi că triunghiul determinat de ortocentrele triunghiurilor $AB'C'$, $A'BC'$ şi $A'B'C$ este congruent cu triunghiul $A'B'C'$.

Turneul oraşelor, 2001

Soluţie:
Fie H, H_A, H_B şi H_C ortocentrele triunghiurilor ABC, $AB'C'$, $A'BC'$, respectiv $A'B'C$. Atunci $A'H_C \parallel B'H$ (sunt ambele perpendiculare pe AC) şi $B'H_C \parallel A'H$ (ambele sunt perpendiculare pe BC). Rezultă că $A'HB'H_C$ este paralelogram. Analog se arată că şi $B'HC'H_A$ şi $C'HA'H_B$ sunt paralelograme. Atunci $A'H_C \parallel HB' \parallel C'H_A$ şi $A'H_C = HB' = C'H_A$, deci şi $A'H_CH_AC'$ este paralelogram. Rezultă că $H_AH_C = C'A'$. Analog rezultă şi $H_BH_A = A'B'$ şi $H_CH_B = B'C'$, deci triunghiurile $H_AH_BH_C$ şi $A'B'C'$ sunt congruente (LLL).



Observaţie: Segmentele $[AH_A]$, $[BH_B]$, $[CH_C]$ au acelaşi mijloc, iar triunghiurile $H_AH_BH_C$ şi $A'B'C'$ sunt simetrice faţă de acesta.

Ca un exerciţiu suplimentar, vă propunem să demonstraţi că dreptele AH_A, BH_B şi CH_C sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Problema 4. Păcală şi Tândală şi-au primit salariul anual în bancnote de 13 lei. La un restaurant, Păcală a comandat 9 felii de pâine, 10 pahare de suc şi 7 cârnaţi, iar Tândală a comandat 5 felii de pâine, 7 pahare de suc şi un cârnat. Preţurile unei felii de pâine, unui pahar de suc şi a unui cârnat se exprimă prin câte un număr întreg de lei. Arătaţi că dacă Păcală îşi poate plăti comanda cu un număr întreg de bancnote fără a primi rest, atunci şi Tândală poate face acelaşi lucru.

Olimpiadă Moldova, 1998

Soluţie:
Să presupunem că Tândală ar fi comandat de 6 ori mai mult, adică 30 de felii de pâine, 42 de pahare de suc şi 6 cârnaţi. Împreună cu Păcală, el ar fi comandat 39 de felii de pâine, 52 de pahare de suc şi 13 cârnaţi. Cum toate aceste cantităţi sunt divizible cu 13, totalul ar fi putut fi plătit cu un număr întreg de bancnote de 13 lei. Dar şi comanda lui Păcală poate fi plătită exact cu bancnote de 13 lei, deci şi cantitatea care reprezintă de 6 ori comanda lui Tândală poate fi, şi ea, plătită exact cu bancnote de 13 lei. Cum 6 şi 13 sunt prime între ele, dacă $6x$ este divizibil cu 13 atunci şi x (cantitatea comandată de fapt de Tândală) este divizibil cu 13, adică poate fi plătit cu un număr întreg de bancnote de 13 lei.