**Problema 1.** Determinaţi numerele întregi $a$ pentru care mulţimea

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \left|x - \sqrt{2}\right| + \left|x - \sqrt{3}\right| < a\}$$

are exact două elemente.

*Marius Ghergu*, lista scurtă ONM 2003

*Soluţie:*
Să considerăm numerele de forma $\left|x - \sqrt{2}\right| + \left|x - \sqrt{3}\right|$, unde $x \in \mathbb{Z}$. Condiţia din enunţ revine la a determina acele numere întregi $a$ care sunt mai mari decât exact două dintre aceste numere.
Pentru $x \geq 2$ se obţin următoarele numere, în ordine crescătoare:

$$4 - \sqrt{2} - \sqrt{3},\ 6 - \sqrt{2} - \sqrt{3},\ 8 - \sqrt{2} - \sqrt{3},\ \ldots,$$

iar pentru $x \leq 1$ se obţin, scrise tot în ordine crescătoare, numerele:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2,\ \sqrt{2} + \sqrt{3},\ \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2,\ \sqrt{2} + \sqrt{3} + 4,\ \ldots .$$

În ordine crescătoare, avem aşadar:

$$4 - \sqrt{2} - \sqrt{3} < \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 < 6 - \sqrt{2} - \sqrt{3} < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 8 - \sqrt{2} - \sqrt{3} < \ldots .$$

Prin urmare convin numerele întregi situate între $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 \approx 1,14$ şi $6 - \sqrt{2} - \sqrt{3} \approx 2,85$, prin urmare convine $a = 2$. Într-adevăr, în acest caz $A = \{1, 2\}$.

**Problema 2.** a) Determinaţi toate numerele naturale nenule $n$, astfel încât suma tuturor numerelor naturale de la 1 la $n+1$ poate fi reprezentată ca suma a $n$ numere naturale consecutive.
b) Determinaţi numerele naturale $n$ pentru care există un număr întreg $a$ astfel încât suma numerelor întregi de la $a$ la $a+n$ este egală cu suma numerelor întregi de la $a+n+1$ la $a+2n$.

Olimpiadă Estonia, 2013

**Soluţie:**
a) Evident, $2 + 3 + \ldots + n + (n+1) < 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) \leq 3 + 4 + \ldots + n + (n+1) + (n+2)$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $1 + 2 \leq n + 2$, deci cu $n \geq 1$. Avem egalitate pentru $n = 1$ (căci $1 + 2 = 3$). Pentru $n > 1$ fixat, suma a $n$ numere naturale consecutive e cu atât mai mare cu cât primul număr este mai mare. Fiind cuprinsă între două astfel de sume consecutive, obţinute cu primul termen 2, respectiv primul termen 3, suma a $n+1$ numere naturale nenule consecutive nu poate fi egală cu suma a $n$ numere naturale nenule consecutive.

b) Condiţia din enunţ revine la

$$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+n) = (a+n+1) + (a+n+2) + \ldots + (a+2n),$$

adică la $(n+1)a + \dfrac{n(n+1)}{2} = na + n^2 + \dfrac{n(n+1)}{2}$, ceea ce revine la $a = n^2$.
Aşadar, pentru orice $n$ natural, există $a = n^2$ astfel ca $n^2 + (n^2+1) + (n^2+2) + \ldots + (n^2+n) = (n^2+n+1) + (n^2+n+2) + \ldots + (n^2+2n)$.

Răspunsul este aşadar: ,,orice $n$ natural".

**Problema 3.** Care este numărul minim de elemente care trebuie alese din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ pentru a fi siguri că printre elementele alese există două cu diferenţa 3?

* * *

**Soluţie:**
Răspunsul este 1009.
Dacă alegem mai puţine, este posibil ca printre elementele alese să fie numai numere care dau unul din resturile 1, 2 sau 3 la împărţirea cu 6. (Este clar că nu există două asemenea numere care să difere prin 3. Sunt 1008 asemenea numere.)
Dacă alegem 1009, grupând numerele în mulţimi având una din formele

$$\{6k+1,\, 6k+4\},\ \{6k+2,\, 6k+5\} \text{ sau } \{6k+3,\, 6k+6\}, \text{ cu } k \in \{0, 1, 2, \ldots, 335\},$$

adică 1008 mulţimi, din principiul cutiei rezultă că printre numerele alese există două care fac parte din aceeaşi submulţime. Diferenţa acestora este 3.

**Comentariu:** (*O altă prezentare a soluţiei de mai sus, din care se vede şi de unde anume ne vin ideile.*)
Scriem mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ ca reuniune a următoarelor trei mulţimi:

$$A_1 = \{1, 4, 7, \ldots, 2014\},\ A_2 = \{2, 5, 8, \ldots, 2015\},\ A_3 = \{3, 6, 9, \ldots, 2016\}.$$

Problema cere să găsim numărul minim de elemente ce trebuie alese astfel ca, măcar din una din cele trei mulţimi, să fi fost alese două elemente consecutive ale mulţimii. Cum fiecare din cele trei submulţimi are 336 elemente (adică număr par), dacă din fiecare mulţime alegem tot al doilea element (adică fie toate numerele pare dintr-o submulţime, fie toate numerele impare dintr-o submulţime), am ales 1008 numere care au proprietatea că nicicare două nu diferă prin 3. Dacă însă luăm 1009 elemente, va trebui să avem două numere vecine într-o submulţime. Întradevăr, grupând elementele fiecărei submulţimi în perechi de elemente consecutive (pentru $A_1$ facem perechile $\{1, 4\}$, $\{7, 10\}$, $\ldots$, $\{2011, 2014\}$, pentru $A_2$ facem perechile $\{2, 5\}$, $\{8, 11\}$, $\ldots$, $\{2012, 2015\}$, iar pentru $A_3$ facem $\{3, 6\}$, $\{9, 12\}$, $\ldots$, $\{2013, 2016\}$), vom avea 1008 perechi (cutii) şi 1009 numere, deci, conform principiului cutiei, printre numerele alese trebuie să existe două care se află în aceeaşi pereche, deci să aibă diferenţa 3.

Cum am rezolva atunci o problemă similară:

Care este numărul minim de elemente care trebuie alese din mulţimea

$$\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$$

pentru a fi siguri că printre elementele alese există două cu diferenţa 5?

* * *

Scriem mulţimea $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ ca reuniune următoarelor cinci mulţimi:

$$\begin{aligned}A_1 &= \{1, 6, 11, \dots, 2016\},\\ A_2 &= \{2, 7, 12, \dots, 2012\},\\ A_3 &= \{3, 8, 13, \dots, 2013\},\\ A_4 &= \{4, 9, 14, \dots, 2014\},\\ A_5 &= \{5, 10, 15, \dots, 2015\}.\end{aligned}$$

Problema cere să găsim numărul minim de elemente ce trebuie alese astfel ca, măcar din una din cele cinci mulţimi, să fi fost alese două elemente consecutive ale mulţimii. Dacă din fiecare mulţime alegem tot al doilea element (adică fie toate numerele pare dintr-o submulţime, fie toate numerele impare dintr-o submulţime), am ales numere care au proprietatea că nicicare două nu diferă prin 5. Însă spre deosebire de problema de mai sus, cele cinci submulţimi nu mai au, toate, un număr par de elemente ($A_1$ are 404 elemente, celelalte au 403.) Din $A_1$ putem lua maxim 202 elemente fără a avea două cu diferenţa 5 - putem lua fie numerele cu ultima cifră 1, fie pe cele cu ultima cifră 6. Însă la celelalte patru submulţimi contează deja dacă alegem numerele pare sau pe cele impare (de pildă în $A_2$ avem 202 elemente pare şi doar 201 impare.) Aşadar, din mulţimile $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ vom alege numerele care au ultima cifră 2, 3, 4, respectiv 5. Am putut astfel alege $5 \cdot 202 = 1010$ elemente fără ca printre ele să se afle numere care sunt elemente consecutive ale uneia din cele cinci submulţimi, adică fără să existe numere cu diferenţa 5.

Dacă însă luăm 1011 elemente, va trebui să avem două numere vecine într-o submulţime. Într-adevăr, grupând elementele fiecărei submulţimi în perechi de elemente consecutive, lăsând eventual ultimul element singur

(pentru $A_1$ facem perechile $\{1, 6\}$, $\{11, 16\}$, ... , $\{2011, 2016\}$, pentru $A_2$ facem grupele $\{2, 7\}$, $\{12, 17\}$, ... , $\{2002, 2007\}$ şi $\{2012\}$, pentru $A_3$ facem $\{3, 8\}$, $\{13, 18\}$, ... , $\{2003, 2008\}$ şi $\{2013\}$, pentru $A_4$ facem $\{4, 9\}$, $\{14, 19\}$, ... , $\{2004, 2009\}$ şi $\{2014\}$, iar pentru $A_5$ facem $\{5, 10\}$, $\{15, 20\}$, ... , $\{2005, 2010\}$ şi $\{2015\}$), vom avea 1010 mulţimi (cutii) şi 1011 numere, deci, conform principiului cutiei, printre numerele alese trebuie să existe două care se află în aceeaşi mulţime, deci să aibă diferenţa 5.

**Problema 4.** Fie $ABC$ un triunghi în care $[AH]$ este înălţimea din $A$, $[BM]$ este mediana din $B$, $[CD]$ este bisectoarea din $C$ şi $\{J\} = BM \cap CD$. Arătaţi că dacă $JB = JC$, atunci $JM = JH$.

* * *

*Soluţie:*
Notând $m(\sphericalangle JCB) = m(\sphericalangle JCM) = \alpha$, avem că şi $m(\sphericalangle JBH) = \alpha$. În triunghiul dreptunghic $AHC$, $[HM]$ este mediană, deci $HM = AM = CM$. Atunci $m(\sphericalangle MHC) = m(\sphericalangle MCH) = 2\alpha$. În triunghiul $BHM$, $\sphericalangle MHC$ este unghi exterior, deci $m(\sphericalangle BMH) = m(\sphericalangle MHC) - m(\sphericalangle HBM) = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Atunci $BH = MH = MC$, deci $\Delta\, JHB \equiv \Delta\, JMC$ (LUL), de unde $JH = JM$.