Problema săptămânii 67

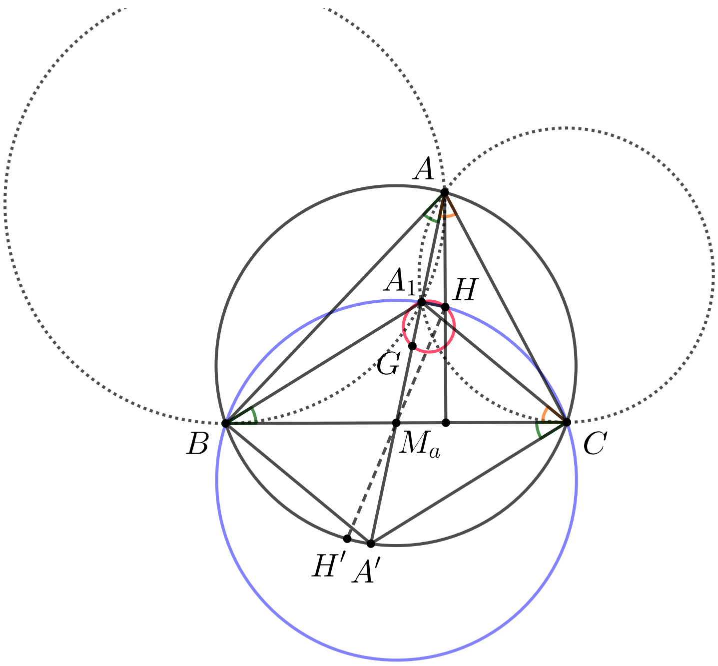
În interiorul unui triunghi scalen, ascuţitunghic, ABC se dă un punct A_1 care satisface relaţiile unghiulare $\sphericalangle A_1AB \equiv \sphericalangle A_1BC$ şi $\sphericalangle A_1AC \equiv \sphericalangle A_1CB$. În mod analog definim punctele B_1 şi C_1. Notăm cu G şi H centrul de greutate şi ortocentrul triunghiului ABC. Arătaţi că punctele A_1, B_1, C_1, G şi H sunt conciclice.

antrenament echipă OIM, Australia şi Marea Britanie, 2017[1]

Soluţia 1: Vom considera că $AB > AC$, celălalt caz fiind analog. Din $\sphericalangle A_1AB \equiv \sphericalangle A_1BC$ rezultă că BC este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABA_1, iar din $\sphericalangle A_1AC \equiv \sphericalangle A_1CB$ rezultă că BC este tangentă şi cercului circumscris triunghiului ACA_1. Dacă notăm cu M_a punctul în care axa radicală a celor două cercuri, AA_1, intersectează BC, rezultă că M_a are aceeaşi putere faţă de cele două cercuri, deci este mijlocul laturii $[BC]$. Fie A' şi H' simetricele lui A_1 şi H faţă de M_a. Se ştie că H' se află pe cercul circumscris triunghiului ABC. Se arată uşor că şi A' se află pe acest cerc: într-adevăr, $\sphericalangle M_aAB \equiv \sphericalangle M_aBA_1 \equiv \sphericalangle M_aCA'$.

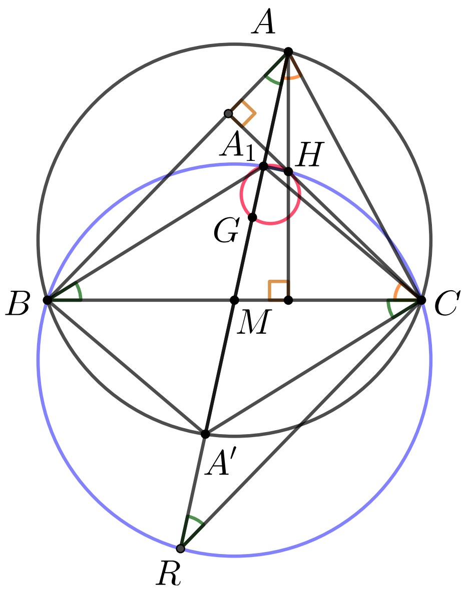
Atunci punctele B, C, H, A_1 sunt conciclice (se află pe simetricul cercului circumscris lui ABC faţă de M_a).

Dacă $AB > AC$, atunci $m(\sphericalangle HA_1C) = m(\sphericalangle HBC) = 90^\circ - m(\sphericalangle C)$. Pe de altă parte, unghiul $\sphericalangle CA_1A$ subîntinde arcul AC din cercul circumscris lui ACA_1, deci $m(\sphericalangle CA_1A) = 180^\circ - m(\sphericalangle C) = 90^\circ + m(\sphericalangle CA_1H)$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle HA_1A) = 90^\circ$, adică A_1 se află pe cercul de diametru $[GH]$. Analog rezultă că şi B_1 şi C_1 se află pe acest cerc, de unde concluzia.



[1] The Mathematics Ashes

Soluţia 2: (*Victor Popescu*)
Pentru început facem următoarea observaţie: dacă M este mijlocul lui $[BC]$, atunci $A_1 \in (AM)$. Să demonstrăm acest lucru.
Fie A' simetricul lui A_1 faţă de M. Atunci BA_1CA' este paralelogram, prin urmare $\sphericalangle BCA' \equiv \sphericalangle CBA_1 \equiv \sphericalangle BAA_1$. Dar $m(\sphericalangle BA'C) = m(\sphericalangle BA_1C) = 180° - m(\sphericalangle A_1BC) - m(\sphericalangle A_1CB) = 180° - m(\sphericalangle A)$, deci $BACA'$ este inscriptibil. Rezultă că $\sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle BCA' \equiv \sphericalangle BAA_1$, adică $A_1 \in (AA')$.
Observăm că $m(\sphericalangle BHC) = 180° - m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle BA_1C)$, deci BHA_1C este inscriptibil. Fie R punctul în care dreapta AA_1 taie pentru a doua oară cercul circumscris triunghiului BHC. Patrulaterul A_1BRC fiind inscriptibil, avem $\sphericalangle CRA_1 \equiv \sphericalangle CBA_1 \equiv \sphericalangle BAR$, deci $CR \parallel AB$. Apoi, $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp CR$, deci $m(\sphericalangle HA_1R) = 180° - m(\sphericalangle HCR) = 90°$. În concluzie A_1 se află pe cercul de diametru $[GH]$ şi analog se arată că punctele B_1 şi C_1 se află şi ele pe acest cerc.



Problem of the week no. 67
Point A_1 lies inside acute scalene triangle ABC and satisfies

$$\sphericalangle A_1AB = \sphericalangle A_1BC \text{ and } \sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1CB.$$

Points B_1 and C_1 are similarly defined. Let G and H be the centroid and the orthocentre, respectively, of triangle ABC. Prove that A_1, B_1, C_1, G, and H all lie on a common circle.

2017 IMO Final Team Training, Australia and United Kingdom, 2017

Solution: Assume $AB > AC$, the other case being similar. From $\sphericalangle A_1AB = \sphericalangle A_1BC$ it follows that BC is tangent to the circumcircle of triangle ABA_1, while

from $\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1CB$ it follows that BC is also tangent to the circumcircle of triangle ACA_1. If M_a is the point in which the radical axis of the two triangles, AA_1, intersects BC, it follows that M_a has equal power with respect to the two circles, therefore it is the midpoint of their common tangent, $[BC]$.
Let A' and H' be the points symmetric to A_1 and H with respect to M_a. It is well-known that H' lies on the circumcircle of triangle ABC. It is easy to see that so does A': indeed, $\sphericalangle M_aAB = \sphericalangle M_aBA_1 = \sphericalangle M_aCA'$.
We obtain that the points B, C, H, A_1 are concyclic (they all lie on the symmetric of the circumcircle of ABC with respect to M_a).
If $AB > AC$, then $\sphericalangle HA_1C = \sphericalangle HBC = 90° - \sphericalangle C$. On the other hand, angle $\sphericalangle CA_1A$ subtends arc AC of the circumcircle of ACA_1, therefore $\sphericalangle CA_1A = 180° - \sphericalangle C = 90° + \sphericalangle CA_1H$, which means that $\sphericalangle HA_1A = 90°$, i.e. A_1 lies on the circle of diameter $[GH]$. It follows similarly that B_1 and C_1 also lie on this circle.