Problema săptămânii 66

Fie S_n suma cifrelor lui 199^n, $n = 1, 2, \ldots$. Aflaţi cea mai mică valoare a lui S_n.

Olimpiadă Argentina, 2017

Soluţie: $S_1 = 19$. Deoarece $S_n \equiv 199^n \equiv 1 \pmod 9$, singurele valori posibile mai mici decât 19 ale lui S_n ar putea eventual fi 1 (exclus, 199^n nu este putere a lui 10) sau 10. Dacă S_n ar fi 10, cum ultima cifră a lui 199^n este 1 sau 9, suma cifrelor lui $199^n - 1$ ar trebui să fie 9. Dar $199^n - 1$ este divizibil cu 11, deci suma cifrelor de rang par trebuie să difere de suma cifrelor de rang impar printr-un multiplu de 11. Dar suma acestor două sume ar trebuie să fie 9, ceea ce nu se poate.
Prin urmare, cea mai mică valoare posibilă a lui S_n este 19.

Problem of the week no. 66

Let S_n be the sum of the digits of 199^n, $n = 1, 2, \ldots$. Find the smallest value of S_n.

Argentina, 2017

Solution: $S_1 = 19$. As $S_n \equiv 199^n \equiv 1 \pmod 9$, the only possible values, smaller than 19, that S_n could take are 1 and 10. But S_n can't be 1. If $S_n = 10$, the last digit of 199^n is 1 or 9, therefore the sum of the digits of $199^n - 1$ is 9. But $199^n - 1$ is a multiple of 11, hence the difference of the sum of digits at odd places and the sum of its digits at even places should be a multiple of 11. On the other hand, the sum of these two sums should be 9, which is impossible.
In conclusion, the smallest possible value of S_n is 19.