

Problema 1. Avem la dispoziție 27 de cuburi din lemn, de mărime egală, 9 roșii, 9 albastre și 9 albe. Se poate forma cu aceste cuburi un cub $3 \times 3 \times 3$ cu proprietatea că orice rând (paralel cu vreo muchie a cubului) conține trei cuburi care au exact două culori diferite?

S. Fomin, Leningrad (Turneul Orașelor, 1989)

Problema 2. Fie a, b, c, d numere reale nenegative cu $a+b+c+d = 4$. Demonstrați că

$$a^2 + b^3 + c^4 + d^5 \leq a^3 + b^4 + c^5 + d^6.$$

* * *

Problema 3. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (CC')$, $P \in (D'A')$ astfel încât $AM = CN = D'P$. Arătați că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe segmentul $[B'D]$.

Dan Brânzei, Concursul „Al. Myller”, 2004

Problema 4. a) Arătați că dacă n este un număr natural de forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci există n numere naturale impare care au suma egală cu produsul.

b) Reciproc, arătați că dacă există n numere naturale impare x_1, x_2, \dots, x_n cu $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$, atunci n este de forma $4k + 1$ cu $k \in \mathbb{N}$.

M. Kontsevich, Moscova (Turneul Orașelor, 1990)