

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$a^b + b^a = 2ab.$$

* * *

Problema 2. Fie ABC un triunghi obtuzunghic, cu $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ intersectează dreptele AC , respectiv AB , în punctele E și F . Fie P un punct oarecare al segmentului (EF) și M, N, Q proiecțiile lui P pe dreptele AC, AB , respectiv BC .

Demonstrați că $PQ = PM + PN$.

* * *

Problema 3. Câte soluții (a, b, c, d) are în mulțimea numerelor întregi ecuația

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^{2017} ?$$

* * *

Problema 4. O prințesă locuiește într-un apartament format din 17 camere dispuse într-un rând. Fiecare cameră are o ușă către exterior și există câte o ușă între oricare două camere vecine. Prințesa își petrece fiecare zi într-o cameră care este vecină cu camera în care și-a petrecut ziua precedentă. Într-o zi, sosește un prinț dintr-o țară îndepărtată, hotărât să cucerească prințesa. Majordomul îi explică acestuia obiceiurile prințesei și îi comunică regulile pe care trebuie să le urmeze în încercarea de a o peți pe prințesă:

În fiecare zi prințul poate alege una din ușile exterioare și bate la acea ușă. Dacă prințesa este în respectiva cameră, ea îi va deschide ușa și în cele din urmă se va căsători cu prințul. Dacă prințesa nu este în respectiva cameră, atunci nu se întâmplă nimic, iar prințul va avea o nouă șansă a doua zi.

Din păcate, biletul de întoarcere al prințului expiră după 30 de zile. Are prințul suficient de mult timp la dispoziție pentru a fi sigur că o poate cuceri pe prințesă?

* * *