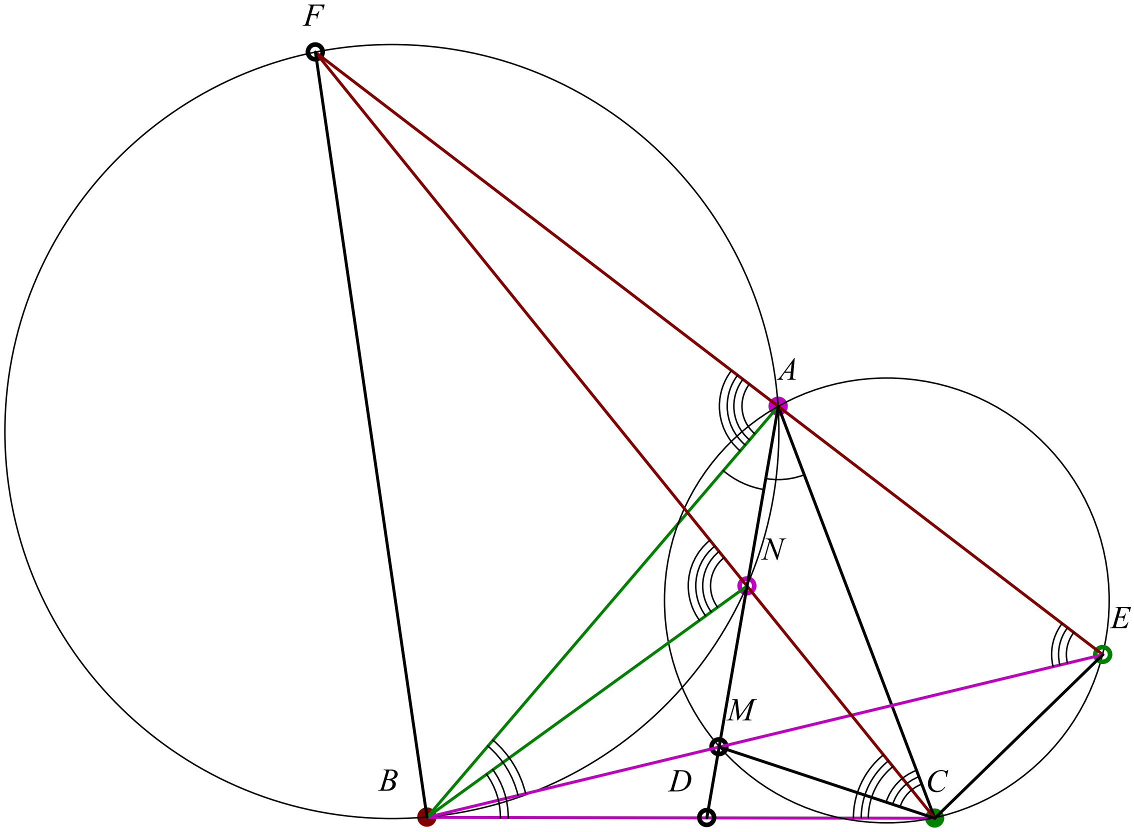
Problema 2 (dată la, al 3-lea baraj pt. JBMO-Franţa, din 25 martie 2015):

În triunghiul ABC, notăm cu $D-$piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$; iar $M,N\in[AD]$ sunt două puncte care satisfac relaţia unghiulară: $\widehat{NBA}\equiv\widehat{CBM}$. Fie $E-$cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei BM, cu cercul circumscris triunghiului ACM şi cu $F-$cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei CN, cu cercul circumscris triunghiului ABN. Demonstraţi că punctele A,E şi $F-$sunt coliniare.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Avem:

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{NAB}\equiv\widehat{MAE}(ip)\\ \widehat{NBA}\equiv\widehat{CBM}(ip)\Leftrightarrow\widehat{NBC}\equiv\widehat{MBA}\ (1)\end{array}\right\}\Rightarrow M\ \text{şi}\ N-\text{sunt puncte izogonale în}\ \Delta ABC\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\widehat{NCB}\equiv\widehat{MCA}\\ \widehat{NBC}\equiv\widehat{MBA}\ (1)\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{CNB}\equiv\underline{\widehat{EAB}}.\quad(2)$$

Pe de altă parte, din: $AFBN-inscriptibil\Rightarrow\underline{\underline{\widehat{BAF}}}\equiv\widehat{BNF}.\quad(3)$

În fine, ţinând acum seama de relţiile (2) şi (3), obţinem că:

$$m\left(\widehat{EAF}\right)=m\left(\underline{\widehat{EAB}}\right)+m\left(\underline{\underline{\widehat{BAF}}}\right)=m\left(\widehat{CNB}\right)+m\left(\widehat{BNF}\right)=m\left(\widehat{FNC}\right)=180^0\Rightarrow A\in[EF].\blacksquare$$