

BARAJ NR. 4 JUNIORI FRANȚA 2023

10 mai 2023

1. Fie ABC un triunghi astfel încât $\widehat{CAB} < \widehat{ABC} < \widehat{BCA} < 90^\circ$. Fie ω cercul circumscris triunghiului ABC , γ_a cercul cu centrul în A și de rază AC și γ_b cercul cu centrul în B și de rază BC . În fine, fie D punctul de intersecție, diferit de C , dintre cercurile ω și γ_b , iar E punctul de intersecție, diferit de C , dintre cercurile γ_a și γ_b . Demonstrați că punctele A , D și E sunt coliniare.

2. Anna și Baptiste joacă următorul joc. La începutul jocului cei doi jucători au în fața lor 2022 de pătrățele albe, numerotate de la 1 la 2022. Apoi, cei doi jucători alternează la mutare, prima fiind Anna. Jucătorul aflat la mutare alege unul dintre pătrățelele albe și îl colorează cu una din două culori, roșu sau albastru, la alegere. Jocul se termină după 2022 de mutări, atunci când toate pătrățelele au fost colorate.

Scorul lui Anne este egal cu numărul de numere naturale a , cu $1 \leq a \leq 2019$, pentru care pătrățelele a și $a + 3$ au aceeași culoare. Anna dorește ca scorul ei să fie cât mai mare posibil, iar Baptiste dorește ca scorul Annei să fie cât mai mic.

Care este cel mai mare scor pe care Anna și-l poate asigura indiferent de modul în care va alege Baptiste să mute?

3. Determinați toate numerele naturale nenule n pentru care există un multiplu al lui 222 pentru care suma pătratelor cifrelor sale este n .

4. Fie $n \geq 1$ un număr natural. Bosphore a scris pe tablă de n ori numărul 2. Apoi, el efectuează, de $n - 1$ ori, succesiv, următoarea operație: alege două numere scrise pe tablă, le numește a și b , le șterge de pe tablă, apoi scrie pe tablă numărul

$\sqrt{\frac{ab+1}{2}}$. La sfârșit el notează cu x numărul scris pe tablă după cele $n - 1$ operații

și cu y numărul $\sqrt{\frac{n+3}{n}}$.

a) Demonstrați că $x \geq y$.

b) Demonstrați că există o infinitate de numere naturale $n \geq 1$ pentru care avem $x > y$, indiferent de modul în care Bosphore alege să facă operațiile.

c) Demonstrați că există o infinitate de numere naturale $n \geq 1$ pentru care Bosphore poate face în așa fel încât $x = y$.

Timp de lucru: 4 ore