BARAJ NR. 4 JUNIORI FRANŢA 2023
10 mai 2023

1. Fie ABC un triunghi astfel încât $\widehat{CAB} < \widehat{ABC} < \widehat{BCA} < 90°$. Fie ω cercul circumscris triunghiului ABC, γ_a cercul cu centrul în A şi de rază AC şi γ_b cercul cu centrul în B şi de rază BC. În fine, fie D punctul de intersecţie, diferit de C, dintre cercurile ω şi γ_b, iar E punctul de intersecţie, diferit de C, dintre cercurile γ_a şi γ_b. Demonstraţi că punctele A, D şi E sunt coliniare.

2. Anna şi Baptiste joacă următorul joc. La începutul jocului cei doi jucători au în faţa lor 2022 de pătrăţele albe, numerotate de la 1 la 2022. Apoi, cei doi jucători alternează la mutare, prima fiind Anna. Jucătorul aflat la mutare alege unul dintre pătrăţelele albe şi îl colorează cu una din două culori, roşu sau albastru, la alegere. Jocul se termină după 2022 de mutări, atunci când toate pătrăţelele au fost colorate.
Scorul lui Anne este egal cu numărul de numere naturale a, cu $1 \leq a \leq 2019$, pentru care pătrăţelele a şi $a + 3$ au aceeaşi culoare. Anna doreşte ca scorul ei să fie cât mai mare posibil, iar Baptiste doreşte ca scorul Annei să fie cât mai mic.
Care este cel mai mare scor pe care Anna şi-l poate asigura indiferent de modul în care va alege Baptiste să mute?

3. Determinaţi toate numerele naturale nenule n pentru care există un multiplu al lui 222 pentru care suma pătratelor cifrelor sale este n.

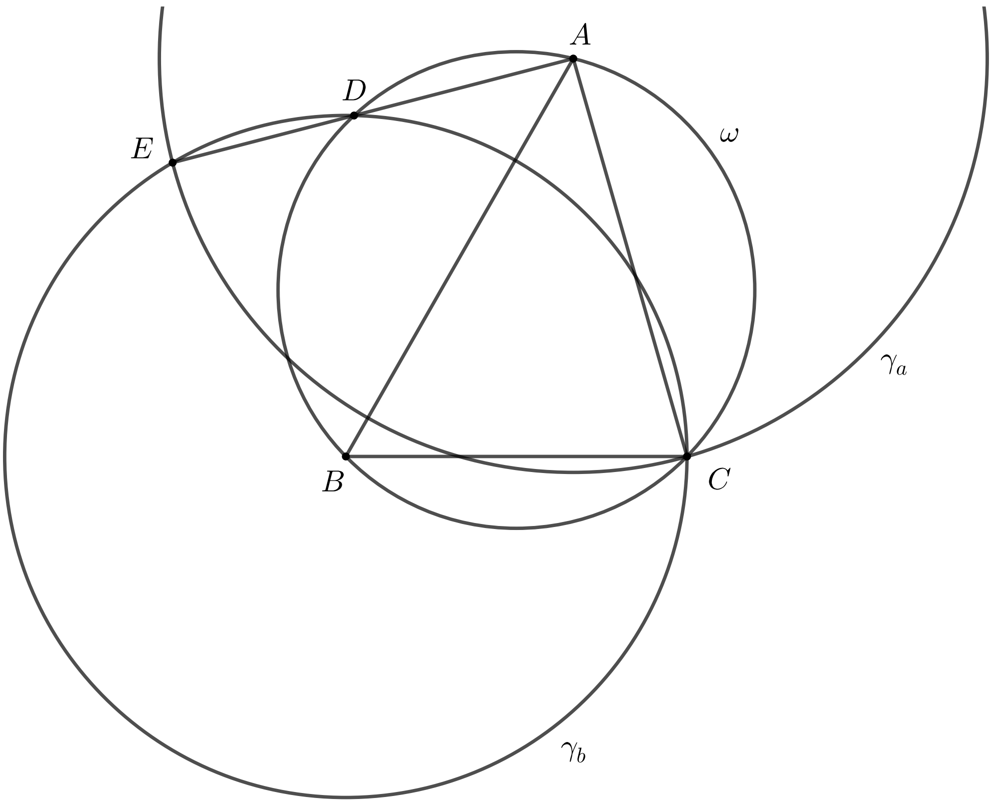
4. Fie $n \geq 1$ un număr natural. Bosphore a scris pe tablă de n ori numărul 2. Apoi, el efectuează, de $n-1$ ori, succesiv, următoarea operaţie: alege două numere scrise pe tablă, le numeşte a şi b, le şterge de pe tablă, apoi scrie pe tablă numărul $\sqrt{\dfrac{ab+1}{2}}$. La sfârşit el notează cu x numărul scris pe tablă după cele $n-1$ operaţii şi cu y numărul $\sqrt{\dfrac{n+3}{n}}$.
a) Demonstraţi că $x \geq y$.
b) Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale $n \geq 1$ pentru care avem $x > y$, indiferent de modul în care Bosphore alege să facă operaţiile.
c) Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale $n \geq 1$ pentru care Bosphore poate face în aşa fel încât $x = y$.

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii:

1. Fie ABC un triunghi astfel încât $\widehat{CAB} < \widehat{ABC} < \widehat{BCA} < 90°$. Fie ω cercul circumscris triunghiului ABC, γ_a cercul cu centrul în A şi de rază AC şi γ_b cercul cu centrul în B şi de rază BC. În fine, fie D punctul de intersecţie, diferit de C, dintre cercurile ω şi γ_b, iar E punctul de intersecţie, diferit de C, dintre cercurile γ_a şi γ_b. Demonstraţi că punctele A, D şi E sunt coliniare.

Soluţia 1:
Fie E' al doilea punct de intersecţie al dreptei AD cu cercul γ_b. Vrem să arătăm că $E' = E$.
Deoarece subîntind coardele egale BC şi BD în cercul ω, unghiurile $\sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle BAD$ sunt congruente. Din $ADBC$ inscriptibil şi $BD = BE'$ (raze) rezultă că $\sphericalangle BE'A = \sphericalangle BDE' = 180° - \sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA$. Deducem că triunghiurile $AE'B$ şi ACB sunt congruente (ULU), deci $AE' = AC$, ceea ce arată că $E' \in \gamma_a \cap \gamma_b$ şi, cum $E' \neq C$, rezultă $E' = E$ şi concluzia.



Soluţia 2: (oficială)
Prin construcţie, CE este axa radicală a cercurilor γ_a şi γ_b, deci C şi E sunt simetrice faţă de AB. În plus, ştim că $BC = BD = BE$. Observăm că

$$\widehat{BAE} = \widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \widehat{BCD} = \widehat{DAB},$$

ceea ce arată că D, A şi E sunt coliniare.

2. Anna şi Baptiste joacă următorul joc. La începutul jocului cei doi jucători au în faţa lor 2022 de pătrăţele albe, numerotate de la 1 la 2022. Apoi, cei doi jucători alternează la mutare, prima fiind Anna. Jucătorul aflat la mutare alege unul dintre pătrăţelele albe şi îl colorează cu una din două culori, roşu sau albastru, la alegere. Jocul se termină după 2022 de mutări, atunci când toate pătrăţelele au fost colorate.
Scorul lui Anne este egal cu numărul de numere naturale a, cu $1 \leq a \leq 2019$, pentru care pătrăţelele a şi $a+3$ au aceeaşi culoare. Anna doreşte ca scorul ei să fie cât mai mare posibil, iar Baptiste doreşte ca scorul Annei să fie cât mai mic. Care este cel mai mare scor pe care Anna şi-l poate asigura indiferent de modul în care va alege Baptiste să mute?

Soluţie:
Vom arăta că Anna poate obţine mereu 1008 puncte dar nu mai multe.
Pentru o mai bună vizualizare a jocului, să reprezentăm pătrăţelele sub forma unui dreptunghi cu 674 de linii şi 3 coloane, pătrăţelele fiind numerotate de sus în jos şi de la stânga la dreapta (pe prima linie, de la stânga la dreapta, sunt pătrăţelele 1, 2 şi 3). Cu această reprezentare, Anna primeşte un punct pentru fiecare pereche de pătrăţele care au aceeaşi culoare şi sunt situate una deasupra celeilalte (asta înseamnă acum că numerele lor diferă prin 3). Pe fiecare coloană avem 674 de pătrăţele separate de câte 673 de segmente orizontale (laturi comune a două pătrăţele vecine pe verticală). Anna primeşte un punct pentru fiecare asemenea segment care separă două pătrăţele de aceeaşi culoare.
Să arătăm, mai întâi că Anna poate mereu obţine 1008 puncte.
Jocul constă din 2022 de mutări, iar Anna face 1011 dintre ele. Cu excepţia mutărilor în care ea începe o coloană care până atunci era complet albă, ea poate obţine la fiecare mutare câte un punct colorând cu o culoare convenabilă un pătrăţel alb care are un vecin deja colorat. Sunt cel mult trei mutări la care Anna nu poate obţine niciun punct, câte o mutare pentru fiecare coloană (printre acestea, prima mutare). Aşadar, Anna poate întotdeauna obţine cel puţin 1008 puncte.
Pentru a vedea că Anna nu îşi poate asigura mai mult de 1008 puncte, vom prezenta strategia lui Baptiste prin care o limitează pe Anna la 1008 puncte. După fiecare mutare a Annei el va alege, în coloana în care Anna a efectuat ultima ei mutare, un segment orizontal care separă un pătrăţel alb de unul colorat şi va colora pătrăţelul alb cu o culoare diferită de cea a vecinului său. După fiecare mutare a lui Baptiste, în fiecare coloană rămâne un număr par de pţrăţele albe, deci Baptiste va avea mereu o mutare precum cea descrisă mai sus. (El este cel care va colora pe fiecare coloană ultimul pătrăţel alb al acesteia.) Fiecare din cele 1011 mutări ale lui Baptiste reduce cu 1 numărul de segmente orizontale care îi pot aduce puncte Annei. Din cele 2019 segmente orizontale, numai $2019 - 1011 = 1008$ îi pot aduce puncte Annei, deci această stratgie a lui Baptiste o limitează pe Anne la 1008 puncte.

Este problema C1 din ShortList JBMO 2022, vezi şi AoPS.

3. Determinaţi toate numerele naturale nenule n pentru care există un multiplu al lui 222 pentru care suma pătratelor cifrelor sale este n.

Soluţie:
Vom demonstra că orice număr natural nenul diferit de 1, 2, 4, 5 şi 7 poate fi suma pătratelor cifrelor unui multiplu al lui 222, în timp ce niciunul din cele cinci numere de mai sus nu poate fi suma pătratelor cifrelor unui multiplu de 222.
Observăm că 1110 este multiplu de 222, astfel că $222 \mid x \to 222 \mid 10000x + 1110$, ceea ce arată că, scriind în continuarea cifrelor unui multiplu, x, al lui 222 grupul 1110 obţinem un nou multiplu de 222, care are suma pătratelor cifrelor cu $1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 = 3$ mai mare decât x.
Astfel, dacă n poate fi suma pătratelor cifrelor unui multiplu al lui 222, atunci şi $n + 3$ poate fi.

• Deoarece 1110 este un multiplu de 222 care are suma pătratelor cifrelor egală cu 3, cu observaţia de mai sus, inductiv rezultă că orice multiplu nenul al lui 3 poate fi suma pătratelor cifrelor unui multiplu de 222. Putem scrie chiar explicit: numărul format din k grupe de 1110 ($4k$ cifre în total) este multiplu de 222 şi are suma pătratelor cifrelor egală cu $3k$.

• Deoarece $12210 = 222 \cdot 55$ este un multiplu de 222 care are suma pătratelor cifrelor egală cu 10, cu observaţia de mai sus, inductiv rezultă că orice orice număr $n \geq 10$ care dă rest 1 la împărţirea la 3 poate fi suma pătratelor cifrelor unui multiplu de 222. Putem scrie chiar explicit: numărul format din 12210 urmat de $k-3$ grupe de 1110 ($4k - 7$ cifre în total) este multiplu de 222 şi are suma pătratelor cifrelor egală cu $3k + 1$.

• Deoarece $12210 = 222 \cdot 55$ este un multiplu de 222 care are suma pătratelor cifrelor egală cu 10, cu observaţia de mai sus, inductiv rezultă că orice orice număr $n \geq 10$ care dă rest 1 la împărţirea la 3 poate fi suma pătratelor cifrelor unui multiplu de 222. Putem scrie chiar explicit: numărul format din 12210 urmat de $k-3$ grupe de 1110 ($4k - 7$ cifre în total) este multiplu de 222 şi are suma pătratelor cifrelor egală cu $3k + 1$.

• Deoarece $112110 = 222 \cdot 505$ este un multiplu de 222 care are suma pătratelor cifrelor egală cu 8, cu observaţia de mai sus, inductiv rezultă că orice orice număr $n \geq 8$ care dă rest 2 la împărţirea la 3 poate fi suma pătratelor cifrelor unui multiplu de 222. Putem scrie chiar explicit: numărul format din 112110 urmat de $k-2$ grupe de 1110 ($4k - 2$ cifre în total) este multiplu de 222 şi are suma pătratelor cifrelor egală cu $3k + 2$.

Să arătăm că suma pătratelor cifrelor nu poate fi 1, 2, 4, 5 sau 7.
Analizând scrierile posibile ale acestor numere ca sumă de pătrate nenule avem: $1 = 1^2$, $2 = 1^1 + 1^2$, $4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2$, $5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2$ şi $7 = 1^2 + \ldots 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$. Putem deduce de aici care ar trebui să fie cifrele nenule ale numărului. Suma cifrelor ar putea fi 1, 2, 3, 4, 5 sau 7. Dar 222 este multiplu de 3, deci singura variantă care mai trebuie exclusă este cea în care

numărul are un 1, un 2 şi în rest 0-uri, adică un număr de forma $10^j + 2 \cdot 10^m$, cu $j \neq m$. Dar $10^k \equiv 10^{k-3} \pmod{111}$ implică $10^j + 2 \cdot 10^m \equiv 10^s + 2 \cdot 10^t \pmod{111}$, unde s şi t sunt resturile la împărţirea cu 3 ale lui j, respectiv m. Analizând cele 9 cazuri constatăm că niciunul dintre ele nu conduce la un multiplu de 111.

Comentariu: Cu observaţia potrivit căreia dacă n este bun atunci şi $n+3$ este bun, trebuie să determinăm cel mai mic număr bun în fiecare din cazurile $3k$, $3k+1$ şi $3k+2$. Dacă pentru $3k$ numărul 1110 se găseşte uşor (de altfel el este esenţial pentru observaţie), cum ajungem să găsim multipli de 222 cu suma cifrelor 8, respectiv 10? Aşa cum am analizat mai sus cazurile 1, 2, 4, 5 şi 7, vedem cum se pot scrie 8, respectiv 10, ca suma de pătrate astfel ca suma cifrelor să fie divizibilă cu 3. Găsim $8 = 1^1 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$, cu $1+1+1+1+2 = 6$, multiplu de 3, respectiv $10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2$, cu $1+1+2+2 = 6$, multiplu de 3. Deci, dacă e să găsim un multiplu de 222 cu suma cifrelor 8, respectiv 10, ştim ce cifre nenule trebuie să aibă. A doua observaţie importantă este că $10^k \equiv 10^{k-3} \pmod{111}$ implică $\overline{a_u \ldots a_3 a_2 a_1 a_0} \equiv (a_0 + a_3 + \ldots) + (a_1 + a_4 + \ldots) \cdot 10 + (a_2 + a_5 + \ldots) \cdot 100 \pmod{111}$, deci ar fi suficient ca $a_0 + a_3 + \ldots = a_1 + a_4 + \ldots = a_2 + a_5 + \ldots$. Acest lucru este posibil grupând cifrele în trei grupe cu suma 2 fiecare: $1+1 = 1+1 = 2$, respectiv $1+1 = 2 = 2$. În plus, pentru ca numărul să fie par, alegem $\{a_0, a_3\} = \{0, 2\}$ în ambele cazuri.

Este o variantă a problemei N6 din ShortList JBMO 2022, vezi şi AoPS.

4. Fie $n \geq 1$ un număr natural. Bosphore a scris pe tablă de n ori numărul 2. Apoi, el efectuează, de $n-1$ ori, succesiv, următoarea operaţie: alege două numere scrise pe tablă, le numeşte a şi b, le şterge de pe tablă, apoi scrie pe tablă numărul $\sqrt{\dfrac{ab+1}{2}}$. La sfârşit el notează cu x numărul scris pe tablă după cele $n-1$ operaţii şi cu y numărul $\sqrt{\dfrac{n+3}{n}}$.

a) Demonstraţi că $x \geq y$.
b) Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale $n \geq 1$ pentru care avem $x > y$, indiferent de modul în care Bosphore alege să facă operaţiile.
c) Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale $n \geq 1$ pentru care Bosphore poate face în aşa fel încât $x = y$.

Soluţie: (oficială)
În continuare, notăm cu x_n cel mai mic număr real la care poate ajunge Bosphore pornind de la n numere egale cu 2 şi notăm cu $y_n = \sqrt{\dfrac{n+3}{n}}$. Trebuie să demonstrăm că $x_n \geq y_n$, cu egalitate pentru o infinitate de n-uri şi inegalitate strictă pentru o infinitate de n-uri. Studiind ce se întâmplă pentru valori mici ale lui n,

intuim următoarea proprietate:
$P(n)$: „inegalitatea $x_n \geq y_n$ este adevărată şi avem $x_n = y_n$ dacă şi numai dacă n este putere a lui 2."
Reciproc, fie u şi v ultimele numere şterse de Bosphore înainte de a scrie pe tablă numărul x. Dacă Bosphore vrea să obţină un x cât mai mic, el are interesul de a face u şi v cât mai mici. Prin urmare, dacă sunt k numere de 2 care, prin rescrieri, au condus la apariţia lui u pe tablă şi sunt ℓ numere de 2 care au condus la apariţia lui v, Bosphore va face astfel încât $u = x_k$ şi $v = x_\ell$ Asta înseamnă că x_n este cel mai mic dintre numerele

$$\sqrt{\frac{x_1x_{n-1}+1}{2}}\ \sqrt{\frac{x_2x_{n-2}+1}{2}},\ \ldots,\ \sqrt{\frac{x_{n-1}x_1+1}{2}}.$$

Vom demonstra aşadar $P(n)$ prin inducţie după $n \geq 1$.
Mai întâi, $x_1 = 2 = y_1$, deci $P(1)$ este adevărată.
Apoi, dacă $P(1)$, $P(2)$, $\ldots$, $P(n-1)$ sunt adevărate, avem $x_k \geq y_k$ şi $x_\ell \geq y_\ell$ pentru orice $1 \leq k, \ell \leq n-1$ şi vrem să arătăm că $\sqrt{\frac{x_kx_\ell+1}{2}} \geq y_n$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că $\sqrt{\frac{y_ky_\ell+1}{2}} \geq y_n$, adică $y_ky_\ell \geq 2y_n^2 - 1$.
Dacă notăm $\Delta = y_k^2y_\ell^2 - (2y_n^2-1)^2$, constatăm că

$$\begin{aligned} k\ell(k+\ell)^2\Delta &= (k+3)(\ell+3)(k+\ell)^2 - kl(k+\ell+6)^2 \\ &= 3(k+\ell+3)(k+\ell)^2 - 12l\ell(k+\ell+3) \\ &= 3(k+\ell+3)(k^2+2k\ell+\ell^2-4k\ell) \\ &= 3(k+\ell+3)(k-\ell)^2. \end{aligned}$$

Asta ne arată că $\Delta \geq 0$, deci $x_kx_\ell \geq y_ky_\ell \geq 2y_n^2 - 1$. În plus, egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_k = y_k$, $x_\ell = y_\ell$ şi $\Delta = 0$, adică atunci când $k = \ell$ este o putere a lui 2. Deducem că inegalitatea $x_n \geq y_n$ este adevărată, cu egalitate dacă şi numai dacă n este o putere a lui 2.
În concluzie:
a) Oricare ar fi n, există două numere naturale nenule k şi $\ell = n - k$ pentru care

$$x_n = \sqrt{\frac{x_kx_\ell+1}{2}} \geq \sqrt{\frac{y_ky_\ell+1}{2}} \geq y_n.$$

b) Dacă n nu este o putere a lui 2, k şi ℓ nu sunt ambele egale cu o aceeaşi putere a lui 2, deci una din inegalităţile $x_k \geq y_k$, $x_\ell \geq y_\ell$ şi $\sqrt{\frac{y_ky_\ell+1}{2}} \geq y_n$ este strictă, astfel că $x_n > y_n$.

c) Dacă n este o putere a lui 2, inegalitatea $x_n \leq \sqrt{\frac{x_{n/2}^2+1}{2}} = \sqrt{\frac{y_{n/2}^2+1}{2}} = y_n$ arată că $x_n = y_n$.

Este problema A5 din ShortList JBMO 2022, vezi şi AoPS.