

BARAJ NR. 3 JUNIORI FRANȚA 2023
5 aprilie 2023

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Anna a scris pe tablă n numere întregi, a_1, a_2, \dots, a_n , distincte două câte două. Ea remarcă apoi că, oricum ar alege $n - 1$ dintre aceste numere, suma lor este mereu divizibilă cu n .

Demonstrați că suma tuturor celor n numere este divizibilă cu n .

2. Fie a, b, c trei numere reale pozitive. Demonstrați că

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + 3) \geq 3(a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

3. Alice a aranjat 200 de cutii în camera ei. Fiecare cutie conține o bucată de hârtie pe care este scris un număr natural nenul; numerele scrise pe cele 200 de bucăți de hârtie nu sunt neapărat distincte. La fiecare minut, câtă vreme este posibil, Alice efectuează o acțiune de forma următoare: ea alege trei cutii care conțin trei numerele naturale a, b, c cu proprietatea $c = a + b$; de asemenea, ea alege un număr natural $k \geq 2$ și înlocuiește numărul c cu numărul $k \cdot c$. Dacă Alice nu mai poate efectua nicio astfel de acțiune ea se oprește definitiv.

Demonstrați că, oricare ar fi situația inițială și alegerile lui Alice, ea va fi obligată să se oprească la un moment dat.

4. Fie ABC un triunghi isoscel, ascuțitunghic, cu vârful în A și fie D un punct pe segmentul $[BC]$. Fie ℓ paralela prin A la BC și X acel punct de pe dreapta ℓ pentru care XD este perpendiculară pe BC . Fie Γ cercul de centru X care trece prin D . Cercul Γ intersectează segmentul $[AB]$ într-un punct E și notăm cu Y acel punct al dreptei ℓ pentru care AB este perpendiculară pe EY ; analog, Γ intersectează segmentul $[AC]$ într-un punct F și notăm cu Z acel punct al dreptei ℓ pentru care AC este perpendiculară pe FZ .

Demonstrați că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle EYA$ și $\sphericalangle FZA$ se intersectează într-un punct aparținând dreptei XD .

Timp de lucru: 4 ore