BARAJ NR. 3 JUNIORI FRANŢA 2023
5 aprilie 2023

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Anna a scris pe tablă n numere întregi, a_1, a_2, ... , a_n, distincte două câte două. Ea remarcă apoi că, oricum ar alege $n-1$ dintre aceste numere, suma lor este mereu divizibilă cu n.
Demonstraţi că suma tuturor celor n numere este divizibilă cu n.

2. Fie a, b, c trei numere reale pozitive. Demonstraţi că

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + 3) \geq 3(a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

3. Alice a aranjat 200 de cutii în camera ei. Fiecare cutie conţine o bucată de hârtie pe care este scris un număr natural nenul; numerele scrise pe cele 200 de bucăţi de hârtie nu sunt neapărat distincte. La fiecare minut, câtă vreme este posibil, Alice efectuează o acţiune de forma următoare: ea alege trei cutii care conţin trei numerele naturale a, b, c cu proprietatea $c = a + b$; de asemenea, ea alege un număr natural $k \geq 2$ şi înlocuieşte numărul c cu numărul $k \cdot c$. Dacă Alice nu mai poate efectua nicio astfel de acţiune ea se opreşte definitiv.
Demonstraţi că, oricare ar fi situaţia iniţială şi alegerile lui Alice, ea va fi obligată să se oprească la un moment dat.

4. Fie ABC un triunghi isoscel, ascuţitunghic, cu vârful în A şi fie D un punct pe segmentul $[BC]$. Fie ℓ paralela prin A la BC şi X acel punct de pe dreapta ℓ pentru care XD este perpendiculară pe BC. Fie Γ cercul de centru X care trece prin D. Cercul Γ intersectează segmentul $[AB]$ într-un punct E şi notăm cu Y acel punct al dreptei ℓ pentru care AB este perpendiculară pe EY; analog, Γ intersectează segmentul $[AC]$ într-un punct F şi notăm cu Z acel punct al dreptei ℓ pentru care AC este perpendiculară pe FZ.
Demonstraţi că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle EYA$ şi $\sphericalangle FZA$ se intersectează într-un punct aparţinând dreptei XD.

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii:

1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Anna a scris pe tablă n numere întregi, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, distincte două câte două. Ea remarcă apoi că, oricum ar alege $n-1$ dintre aceste numere, suma lor este mereu divizibilă cu n.
Demonstraţi că suma tuturor celor n numere este divizibilă cu n.

Soluţie:
Dacă notăm cu s suma numerelor de pe tablă, ştim că $s - a_j$ este divizibil cu n pentru orice j, deci $(s - a_k) - (s - a_j) = a_j - a_k$ este divizibil cu n pentru orice indici j, k. Deducem că toate numerele de pe tablă dau acelaşi rest, r, la împărţirea cu n. Atunci suma celor n numere va fi congruentă cu nr modulo n, adică va fi congruentă cu 0 modulo n.

Remarcă: Revenind la ipoteză, rezultă mai mult, anume că fiecare număr este divizibil cu n. Faptul că numerele sunt distincte două câte două este nerelevant.

2. Fie a, b, c trei numere reale pozitive. Demonstraţi că

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + 3) \geq 3(a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

Soluţia 1:
Inegalitatea se obţine adunând inegalităţile: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, $a^3 + b^3 + 1 \geq 3ab$, $b^3 + c^3 + 1 \geq 3bc$, $c^3 + a^3 + 1 \geq 3ca$, $a^3 + 1 + 1 \geq 3a$, $b^3 + 1 + 1 \geq 3b$, $c^3 + 1 + 1 \geq 3c$ şi $1 + 1 + 1 \geq 3$.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Soluţia 2:
Din Inegalitatea lui Hölder avem $(1 + 1 + 1 + 3)(1 + 1 + 1 + 3)(a^3 + b^3 + c^3 + 3) \geq (\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot a^3} + \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot b^3} + \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot c^3} + \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3})^3 = (a+b+c+3)^3 \geq 27(a+1)(b+1)(c+1)$, ultima inegalitate fiind inegalitatea mediilor scrisă pentru numerele $a+1$, $b + 1$, $c + 1$.
Împărţind cu 9 se obţine inegalitatea din enunţ.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Soluţia 3: (bazată pe cea oficială)
Din inegalitatea mediilor avem $(a+1)(b+1)(c+1) \leq \dfrac{(a + 1)^3 + (b + 1)^3 + (c + 1)^3}{3}$, deci ar fi suficient să demonstrăm că $(a+1)^3+(b+1)^3+(c+1)^3 \leq 4(a^3+b^3+c^3+3)$. Acestă inegalitate rezultă din inegalitatea $(a + 1)^3 \leq 4(a^3 + 1)$ care, adunată cu analoagele scrise pentru b şi c, dă inegalitatea dorită. Să demonstrăm inegalitatea $(a + 1)^3 \leq 4(a^3 + 1)$, adică $3(a^3 - a^2 - a + 1) \geq 0$, sau $3(a - 1)(a^2 - 1) \geq 0$, sau $(a - 1)^2(a + 1) \geq 0$, clar adevărată. Egalitatea are loc dacă $a = b = c = 1$.

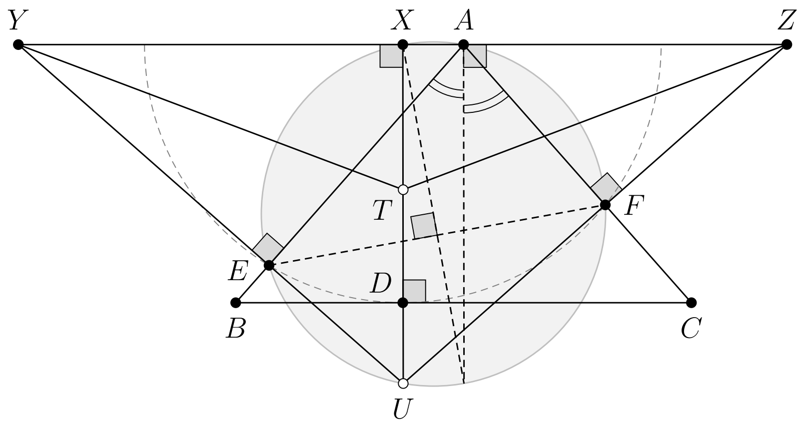
3. Alice a aranjat 200 de cutii în camera ei. Fiecare cutie conţine o bucată de hârtie pe care este scris un număr natural nenul; numerele scrise pe cele 200 de bucăţi de hârtie nu sunt neapărat distincte. La fiecare minut, câtă vreme este posibil, Alice efectuează o acţiune de forma următoare: ea alege trei cutii care conţin trei numerele naturale a, b, c cu proprietatea $c = a + b$; de asemenea, ea alege un număr natural $k \geq 2$ şi înlocuieşte numărul c cu numărul $k \cdot c$. Dacă Alice nu mai poate efectua nicio astfel de acţiune ea se opreşte definitiv.
Demonstraţi că, oricare ar fi situaţia iniţială şi alegerile lui Alice, ea va fi obligată să se oprească la un moment dat.

Soluţie: (oficială)
Mai jos vom spune că un număr întreg c se schimbă dacă Alice înlocuieşte numărul c cu un număr întreg $k \cdot c$.
Alice colorează cu albastru acele numere întregi care se schimbă de un număr finit de ori şi cu roşu acele numere întregi care se schimbă de o infinitate de ori. Prin construcţie, numărul care la început era cel mai mic nu se va putea schimba niciodată, deci el este albastru. Să presupunem prin absurd că ar exista un număr roşu. La un moment dat, Alice termină de schimbat numerele albastre. Fie v valoarea celui mai mare număr albastru la acel moment. Când un număr roşu se schimbă, el creşte cu cel puţin 1. Atunci va exista un moment la care fiecare număr roşu va fi cel puţin $2v + 1$, de exemplu după ce fiecare număr roşu se va fi schimbat de cel puţin $2v$ ori. În acel moment, cel mai mic număr roşu este mai mic sau egal ca toate celelalte numere roşii şi mai mare strict ca suma a oricare două numere albastre. Asta înseamnă că acest număr nu se va mai putea schimba, ceea ce contrazice faptul că acest număr este roşu. Aşadar, presupunerea făcută a fost falsă, deci toate numerele sunt albastre, ceea ce trebuia demonstrat.

Este problema C3 din ShortList JBMO 2022, vezi şi AoPS.

4. Fie ABC un triunghi isoscel, ascuţitunghic, cu vârful în A şi fie D un punct pe segmentul $[BC]$. Fie ℓ paralela prin A la BC şi X acel punct de pe dreapta ℓ pentru care XD este perpendiculară pe BC. Fie Γ cercul de centru X care trece prin D. Cercul Γ intersectează segmentul $[AB]$ într-un punct E şi notăm cu Y acel punct al dreptei ℓ pentru care AB este perpendiculară pe EY; analog, Γ intersectează segmentul $[AC]$ într-un punct F şi notăm cu Z acel punct al dreptei ℓ pentru care AC este perpendiculară pe FZ.
Demonstraţi că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle EYA$ şi $\sphericalangle FZA$ se intersectează într-un punct aparţinând dreptei XD.

Soluţie:



Fie T punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle EYA$ şi $\sphericalangle FZA$, U punctul de intersecţie a dreptelor EY şi FZ şi $\mathscr{C}$ cercul de diametru $[AU]$. Deoarece unghiurile $\sphericalangle UEA$ şi AFU sunt drepte, punctele E şi F aparţin lui $\mathscr{C}$. În plus, deoarece triunghiul ABC este isoscel cu vârful în A, bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, adică a unghiului $\sphericalangle EAF$, este înălţimea din A, deci perpendiculară pe BC şi pe $\ell = AX$. Cum $DX = EX = FX$, punctul X este punctul de intersecţie a bisectoarei exterioare a unghiului $\sphericalangle EAF$ cu mediatoarea lui $[EF]$, adică ,,polul nord" al cercului circumscris triunghiului AEF (mijlocul arcului EAF al cercului circumscris). Asta arată în particlar că X aparţine cercului circumscris triunghiului AEF, adică lui $\mathscr{C}$. În aceste condiţii, unghiul $\sphericalangle UXA$ este drept, deci triunghiurile UXY şi UXZ sunt dreptunghice în X. Dar, cum triunghiurile AEY şi AFZ sunt dreptunghice în E, respectiv F, iar ABC este isoscel, ştim că

$$\widehat{XZU} = \widehat{AZF} = 90^\circ - \widehat{FAZ} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{CBA} = 90^\circ - \widehat{YAE} = \widehat{EYA} = \widehat{XYU}.$$

Aşadar, triunghiurile UXY şi UXZ sunt unul simetricul celuilalt faţă de dreapta UX. Cele două bisectoare, $(YT$ şi $(ZT$, vor fi şi ele simetrice faţă de dreapta UX, deci punctul lor de intersecţie, T, se află pe dreapta UX.

În fine, prin construcţie, dreapta DX este perpendiculară pe dreptele BC şi ℓ, deci coincide cu UX. Conchidem că $T \in DX$, ceea ce trebuia demonstrat.

Este problema G4 din ShortList JBMO 2022 (dar notaţiile sunt schimbate), vezi şi AoPS.