

BARAJ NR. 2 JUNIORI FRANȚA 2023
22 februarie 2023

1. Determinați toate cvadrupelele de numere reale (a, b, c, d) astfel încât

$$a = bc + cd, \quad b = cd + da, \quad c = da + ab, \quad d = ab + bc.$$

2. Determinați toate perechile de numere naturale nenule (k, n) pentru care

$$1! + 2! + \dots + k! = 1 + 2 + \dots + n.$$

3. Fie ABC un triunghi și Γ cercul său circumscris. Fie A_1 mijlocul arcului BC care nu conține punctul A , B_1 mijlocul arcului CA care nu conține punctul B , C_1 mijlocul arcului AB care nu conține punctul C . În fine, fie A_2 punctul pentru care $AB_1A_2C_1$ este un paralelogram, B_2 punctul pentru care $BC_1B_2A_1$ este un paralelogram și C_2 punctul pentru care $CA_1C_2B_1$ este un paralelogram. Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și $A_2B_2C_2$ sunt concentrice.

4. Un grădinar și o ciocănitore joacă următorul joc în grădina lor în forma unei grile 2022×2022 formate din 2022^2 pătrățele. Două pătrățele se consideră a fi vecine dacă au un vârf sau o latură comună. Inițial, în fiecare pătrățel se găsește un copac de înălțime 0. Apoi, la fiecare tură de mutări:

- grădinarul alege un pătrățel, iar copacii din pătrățelul ales precum și din pătrățelele vecine cu acesta (adică în total din cel mult 9 pătrățele) își măresc înălțimea cu 1;
- ciocănitarea alege 4 pătrățele, iar copacii din aceste pătrățele își micșorează înălțimea cu 1 (dar un copac de înălțime 0 rămâne de înălțime 0).

Spunem despre un copac că este splendid dacă are o înălțime de cel puțin 10^6 . Determinați cel mai mare număr natural A pentru care grădinarul poate garanta că, după un număr finit de ture și oricare ar fi alegerile ciocănitorei, în grădină se vor afla cel puțin A copaci splendizi.

Timp de lucru: 4 ore