BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANŢA 2023
11 ianuarie 2023

1. Martin a scris pe tablă perechea $(1011, 1012)$. Apoi, la fiecare minut, dacă pe tablă este scrisă perechea (a, b), el şterge perechea de numere scrisă pe tablă şi o înlocuieşte, la alegere, cu una din perechile (b, a), $(b+1, a-1)$ sau $(b-2, a+2)$, cu singura condiţie ca numerele scrise să fie ambele naturale. Care sunt perechile pe care Martin le poate scrie pe tablă după un număr finit de asemenea operaţiuni?

2. Fie A, B, C, D şi E cinci puncte situate pe un cerc Ω astfel încât CD este paralelă cu BE şi AB este paralelă cu DE. Fie X, Y şi Z mijloacele segmentelor $[BD]$, $[CE]$, respectiv $[AE]$. Demonstraţi că dreapta AE este tangentă cercului circumscris triunghiului XYZ.

3. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $xy + yz + zx = 3$. Arătaţi că

$$\frac{x+3}{y+z} + \frac{y+3}{z+x} + \frac{z+3}{x+y} + 3 \geq 27 \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{(x+y+z)^3}.$$

4. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Pentru fiecare pereche de numere prime (p, q) cu $p < q \leq n$, Morgane a scris pe tablă suma $p + q$. Ea a notat apoi cu $P(n)$ produsul tuturor acestor sume. De exemplu, $P(5) = (2+3) \cdot (2+5) \cdot (3+5) = 280$. Determinaţi toate numerele $n \geq 3$ pentru care $n!$ divide $P(n)$.
Notă: Dacă două sume $p + q$, formate pornind de la două perechi diferite, sunt egale, Morgane le scrie pe tablă pe amândouă. De exemplu, dacă $n = 13$, ea scrie pe tablă şi $3 + 13$ şi $5 + 11$.

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii:

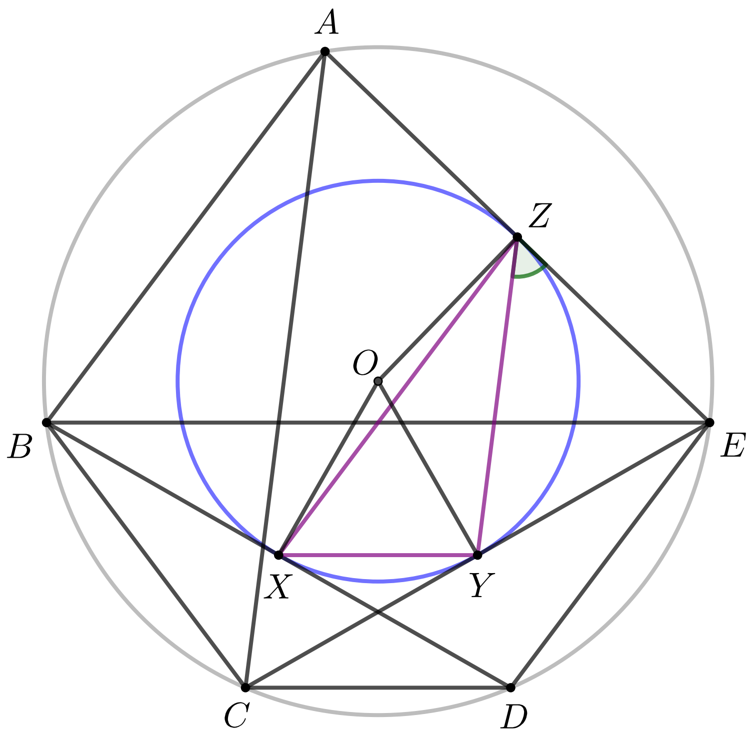
1. Martin a scris pe tablă perechea $(1011, 1012)$. Apoi, la fiecare minut, dacă pe tablă este scrisă perechea (a, b), el şterge perechea de numere scrisă pe tablă şi o înlocuieşte, la alegere, cu una din perechile (b, a), $(b + 1, a - 1)$ sau $(b - 2, a + 2)$, cu singura condiţie ca numerele scrise să fie ambele naturale. Care sunt perechile pe care Martin le poate scrie pe tablă după un număr finit de asemenea operaţiuni?

Soluţie:
Niciuna dintre operaţiuni nu schimbă suma numerelor scrise pe tablă, deci Martin nu poate scrie decât perechi de forma $(a, 2023 - a)$, cu $0 \leq a \leq 2023$.
Vom demonstra că Martin poate obţine toate aceste perechi.
Deoarece de la o pereche (a, b) Martin poate obţine direct perechea (b, a), este suficient să demonstăm că el poate obţine perechile $(a, 2023 - a)$ cu $0 \leq a \leq 1011$.
În fine, dacă Martin porneşte de la o pereche (a, b), el poate scrie $(b + 1, a - 1)$ şi apoi $(a - 1, b + 1)$, deci, prin inducţie după $k \geq 0$, rezultă că el poate obţine orice pereche de forma $(1011 - k, 1012 + k)$, cu $0 \leq k \leq 1011$, adică toate perechile (a, b) cu $0 \leq a < b$ şi $a + b = 2023$.
În concluzie, perechile pe care le poate scrie Martin sunt exact cele de forma $(a, 2023 - a)$, cu $0 \leq a \leq 2023$.

2. Fie A, B, C, D şi E cinci puncte situate pe un cerc Ω astfel încât CD este paralelă cu BE şi AB este paralelă cu DE. Fie X, Y şi Z mijloacele segmentelor $[BD]$, $[CE]$, respectiv $[AE]$. Demonstraţi că dreapta AE este tangentă cercului circumscris triunghiului XYZ.

problema G1 din ShortList JBMO 2022

Soluţia 1:
Fie O centrul cercului Ω. Deja din momentul în care desenăm cercul Γ circumscris triunghiului XYZ, constatăm că acesta pare a fi tangent dreptelor BD, CE şi AE, în vreme ce centrul său pare să coincidă cu O. Vom demonstra că, într-adevăr, $OX = OY = OZ$, ceea ce ne va permite să conchidem că OZ este rază a lui Γ şi că dreapta AE, care este perpendiculară pe ea, este tangentă la Γ.
Ori, dacă notăm cu R raza cercului Γ, teorema lui Pitagora ne arată că $OX^2 = R^2 - \dfrac{BD^2}{4}$, $OY^2 = R^2 - \dfrac{CE^2}{4}$ şi $OZ^2 = R^2 - \dfrac{AE^2}{4}$. Trebuie, aşadar, să arătăm că $BD = CE = AE$.
Deoarece CD este paralel cu BE, iar trapezul $BCDE$ este înscris în cercul Ω, acest trapez este isoscel, astfel că $BD = CE$. Analog, $AB \parallel DE$ arată că $ABDE$ este trapez isoscel, deci concluzionăm, aşa cum ne-am dorit, că $AE = BD$.



Soluţia 2:
Iată o altă manieră de a ajunge la $BD = CE = AE$. Acestea sunt echuivalente cu egalităţile de unghiuri $\sphericalangle BOD = \sphericalangle COE = \sphericalangle EOA$. Paralelismul dreptelor CD şi BE arată atunci că $\sphericalangle BOD = 2\sphericalangle BED = 2(180^\circ - \sphericalangle EDC) = \sphericalangle COE$, în vreme ce paralelismul dreptelor AB şi DE arată că avem, aşa cum am anticipat, $\sphericalangle EOA = 2\sphericalangle EDA = 2\sphericalangle BAD = \sphericalangle BOD$.

Este problema G1 din ShortList JBMO 2022, vezi pe AoPS.

Vezi şi problema 1 de la barajul 1 din Bulgaria, o reciprocă a acestei probleme.

3. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $xy + yz + zx = 3$. Arătaţi că

$$\frac{x+3}{y+z} + \frac{y+3}{z+x} + \frac{z+3}{x+y} + 3 \geq 27 \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{(x+y+z)^3}.$$

Soluţia 1:
Să notăm cu $s = x+y+z$, cu L respectiv R numerele din membrul stâng, respectiv drept, ai inegalităţii de demonstrat. Putem rescrie L ca fiind

$$L = \left(\frac{x+3}{y+z} + 1\right) + \left(\frac{y+3}{z+x} + 1\right) + \left(\frac{z+3}{x+y} + 1\right) = (s+3)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right).$$

Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (forma Titu Andreescu) sau din inegalitatea dintre media armonică şi media aritmetică a numerelor $x+y$, $y+z$,

$z + x$ avem că
$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{9}{2(x+y+z)},$$
deci $L \geq \dfrac{9(s+3)}{2s}$.
Apoi, inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică aplicată numerelor $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ arată că
$$\frac{s}{3} \geq \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}\right)^2.$$
Astfel, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \leq 3(x+y+z) = 3s$ şi $R \leq \dfrac{81}{s^2}$.
Pentru a demonstra că $L \geq R$ este suficient să arătăm că $9(s+3)s^2 \geq 81 \cdot 2s$, adică $s(s+3) \geq 18$, ceea ce rezultă din $s \geq 3$. Acest fapt rezultă din
$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 3(xy + yz + zx) = 9.$$

Soluţia 2:
De astă dată folosim pe de-o parte inegalitatea lui Nesbitt:
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$
şi pe de altă parte inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (forma Titu Andreescu):
$$\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{9}{2s}.$$
Astfel, $L \geq \dfrac{3}{2} + \dfrac{3 \cdot 9}{2s} + 3 = \dfrac{9(s+3)}{2s}$. De aici se finalizează ca la soluţia 1.

Este problema A2 din ShortList JBMO 2022, vezi pe AoPS.

Vezi şi problema 2 de la barajul 1 din Bulgaria (cu soluţie), o variantă a acestei probleme. Problema A2 a fost dată şi la barajul 1 din Azerbaidjan.

4. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Pentru fiecare pereche de numere prime (p, q) cu $p < q \leq n$, Morgane a scris pe tablă suma $p + q$. Ea a notat apoi cu $P(n)$ produsul tuturor acestor sume. De exemplu, $P(5) = (2+3) \cdot (2+5) \cdot (3+5) = 280$. Determinaţi toate numerele $n \geq 3$ pentru care $n!$ divide $P(n)$.
Notă: Dacă două sume $p + q$, formate pornind de la două perechi diferite, sunt egale, Morgane le scrie pe tablă pe amândouă. De exemplu, dacă $n = 13$, ea scrie pe tablă şi $3 + 13$ şi $5 + 11$.

Soluţie:
Fie n un număr cu proprietatea din enunţ şi fie r cel mai mare număr prim astfel

încât $r \geq n$. Deoarece r divide $n!$, r îl divide şi pe $P(n)$, deci există două numere prime p şi q astfel încât $p < q \leq n$ şi r divide $p+q$. Din maximalitatea lui r ştim că $p+q < 2r$, astfel că $p+q = r$. Cum q şi r sunt impare, trebuie ca$p = 2$, deci $q = r-2$ este număr prim.
Analog, există două numere prime s şi t astfel încât $s < t \leq n$ şi q divide $s+t$. Vom arăta că $q-2$ este număr prim. Într-adevăr, dacă $t \leq q$, atunci $s+t < 2q$, deci $s+t = q$ şi, cum t, q sunt impare, obţinem $s = 2$, deci $t = q-2 = r-4$ este număr prim. Dacă $t > q = r-2$ atunci $t = rq+2$, deci $q < s+t < 2q+2 < 3q$, astfel că $s+t = 2q$, deci $s = q-2$. Am obţinut din nou că $s = q-2$ este prim.
Conchidem că numerele $q-2$, q şi $q+2$ sunt prime, ori 3 divide unul din aceste trei numere. Deducem că $q-2 = 3$, deci $r = 7$, prin urmare $n \in \{7, 8, 9, 10\}$. În plus, $n!$ divide

$$P(n) = (2+3)(2+5)(2+7)(3+5)(3+7)(5+7) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Deoarece $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 2^7 \cdot 3$ nu divide $P(n)$, avem în mod necesar $n < 8$, deci $n = 7$. Reciproc, $n = 7$ are într-adevăr proprietatea cerută căci $7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Este problema N2 din ShortList IMO 2022, vezi pe AoPS. Problema, uşor modificată, a fost dată şi ca problemă 1 la barajul 3 (juniori) din Bulgaria.