

BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANȚA 2023
11 ianuarie 2023

1. Martin a scris pe tablă perechea $(1011, 1012)$. Apoi, la fiecare minut, dacă pe tablă este scrisă perechea (a, b) , el șterge perechea de numere scrisă pe tablă și o înlocuiește, la alegere, cu una din perechile (b, a) , $(b + 1, a - 1)$ sau $(b - 2, a + 2)$, cu singura condiție ca numerele scrise să fie ambele naturale. Care sunt perechile pe care Martin le poate scrie pe tablă după un număr finit de asemenea operațiuni?

2. Fie A, B, C, D și E cinci puncte situate pe un cerc Ω astfel încât CD este paralelă cu BE și AB este paralelă cu DE . Fie X, Y și Z mijloacele segmentelor $[BD]$, $[CE]$, respectiv $[AE]$. Demonstrați că dreapta AE este tangentă cercului circumscris triunghiului XYZ .

3. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $xy + yz + zx = 3$. Arătați că

$$\frac{x+3}{y+z} + \frac{y+3}{z+x} + \frac{z+3}{x+y} + 3 \geq 27 \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{(x+y+z)^3}.$$

4. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Pentru fiecare pereche de numere prime (p, q) cu $p < q \leq n$, Morgane a scris pe tablă suma $p + q$. Ea a notat apoi cu $P(n)$ produsul tuturor acestor sume. De exemplu, $P(5) = (2+3) \cdot (2+5) \cdot (3+5) = 280$. Determinați toate numerele $n \geq 3$ pentru care $n!$ divide $P(n)$.

Notă: Dacă două sume $p + q$, formate pornind de la două perechi diferite, sunt egale, Morgane le scrie pe tablă pe amândouă. De exemplu, dacă $n = 13$, ea scrie pe tablă și $3 + 13$ și $5 + 11$.

Timp de lucru: 4 ore