BARAJ NR. 4 JUNIORI FRANŢA 2022
18 mai 2022

1. Determinaţi toate numerele naturale nenule a, b şi c pentru care există numere naturale nenule x, y şi z astfel încât $x! = ab + 1$, $y! = bc + 1$ şi $z! = ca + 1$.
Remarcă: Pentru orice număr natural nenul n, numărul $n!$ desemnează produsul $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

2. Guvernul din Bosnia şi Herţegovina a decis să introducă un nou sistem de numere de înmatriculare. Fiecare număr de îmmatriculare va trebui să conţină 8 cifre, fiecare din ele putând fi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sau 9. În plus, două numere de îmmatriculare distincte trebuie să aibă mereu cel puţin două cifre diferite. De exemplu, dacă pune în circulaţie numărul 00000000, guvernul nu va putea pune în circulaţie numărul 00010000. Determinaţi numărul maxim de numere de înmatriculare pe care guvernul le poate pune în circulaţie.

3. Fie x, y şi z trei numere reale astfel încât $x^2+y^2+z^2 = 1$. Determinaţi valoarea minimă şi valoarea maximă pe care le poate lua numărul real $xy + yz - zx$.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $AC = BC$. Fie P un punct situat pe prelungirea segmentului $[AB]$, dincolo de B. Fie Q punctul de intersecţie, diferit de D, dintre segmentul $[PD]$ şi cercul circumscris lui ACD. Fie apoi R punctul de intersecţie, diferit de P, dintre segmentul $[PC]$ şi cercul circumscris lui APQ. Demonstraţi că dreptele AQ, BR şi CD sunt concurente.

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii:

1. Determinaţi toate numerele naturale nenule a, b şi c pentru care există numere naturale nenule x, y şi z astfel încât $x! = ab + 1$, $y! = bc + 1$ şi $z! = ca + 1$.
Remarcă: Pentru orice număr natural nenul n, numărul $n!$ desemnează produsul $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Soluţie:
Fie (a, b, c) un triplet cu proprietatea din enunţ şi x, y, z numere care satisfac relaţiile date. Datorită faptului că aceste relaţii sunt simetrice în a, b, c, putem presupune $a \leq b \leq c$. Atunci $ab \leq ac \leq bc$, deci $x \leq z \leq y$. Rezultă că $x!$ divide atât $y!$ cât şi $z!$. Fie d un divizor al lui $x!$, adică un divizor comun al numerelor $x!$, $y!$ şi $z!$. Atunci

$$ab \equiv bc \equiv ca \equiv -1 \pmod{d},$$

deci $-1 \equiv (ab)(bc)(ca) = (abc)^2 \pmod{d}$. Dacă $3 \leq x$, atunci putem alege $d = 3$ (puteam să ne uităm direct modulo 3, dar aşa se vede mai bine de ce tocmai modulo 3) şi deducem că $(abc)^2$ este un pătrat congruent cu -1 modulo 3, ceea ce nu se poate. Deducem că $x \leq 2$. Cum $ab+1 \geq 2 > 1!$, deducem că $x = 2$ şi $a = b = 1$. În fine, c trebuie să fie un număr de forma $n! - 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, pentru $a = b = 1$, $c = n! - 1$ putem alege $x = 2$ şi $y = z = n$, deci orice triplet de forma $(1, 1, n! - 1)$ satisface enunţul. Renunţând la condiţia $a \leq b \leq c$ obţinem şi permutările tripletelor de mai sus.

2. Guvernul din Bosnia şi Herţegovina a decis să introducă un nou sistem de numere de înmatriculare. Fiecare număr de îmmatriculare va trebui să conţină 8 cifre, fiecare din ele putând fi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sau 9. În plus, două numere de îmmatriculare distincte trebuie să aibă mereu cel puţin două cifre diferite. De exemplu, dacă pune în circulaţie numărul 00000000, guvernul nu va putea pune în circulaţie numărul 00010000. Determinaţi numărul maxim de numere de înmatriculare pe care guvernul le poate pune în circulaţie.

Soluţie:
Vom demonstra că numărul maximal este egal de numere de înmatriculare disponibile este egal cu 10^7.
Mai întâi, vom spune despre două numere de înmatriculare că fac parte din aceeaşi familie dacă primele 7 cifre ale lor coincid.
Fiecare familie conţine 10 numere, deci sunt 10^7 familii distincte. Guvernul nu poate pune în circulaţie două numere aparţinând aceleaşi familii, deci poate pune în circulaţie cel mult 10^7 numere.
Reciproc, guvernul se poate descurca să creeze 10^7 numere de înmatriculare procedând după cum urmează:
el alege ultima cifră a fiecărui număr de înmatriculare astfel încât suma celor 8 cifre să fie divizibilă cu 10. Astfel, guvernul va atribui exact un număr de înmatriculare

fiecărei familii. Condiţia ca oricare două numere de înmatriculare să difere în cel puţin două poziţii este şi ea îndeplinită: dacă două numere, corespunzătoare la două familii diferite, au 6 din primele 7 cifre identice (şi diferă doar într-o singură poziţie din primele 7), atunci şi cifra a 8-a, determinată unic de suma primelor 7 cifre, va fi diferită la cele două numere.

3. Fie x, y şi z trei numere reale astfel încât $x^2+y^2+z^2=1$. Determinaţi valoarea minimă şi valoarea maximă pe care le poate lua numărul real $xy+yz-zx$.

Soluţie:
În virtutea identităţii

$$(x-y+z)^2 = x^2+y^2+z^2-2(xy+yz-zx) = 1-2(xy+yz-zx),$$

este clar că trebuie să stabilim valoarea maximă, respectiv minimă, a lui $(x-y+z)^2$. Valoarea minimă este 0 şi se atinge când $x-y+z=0$ şi $x^2+y^2+z^2=1$, de exemplu pentru $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $z=0$. Pentru aceste valori ale lui x,y,z expresia din enunţ îşi atinge valoarea maximă, $\dfrac{1}{2}$.
Pentru a stabili valoarea minimă avem două metode, ambele folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz:
Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz rezultă că

$$(xy+yz-zx)^2 \le (x^2+y^2+z^2)\big(y^2+z^2+(-x)^2\big) = 1,$$

deci că

$$-1 \le xy+yz-zx \le 1.$$

Egalitate (una sau alta) avem dacă $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{-x}$. Cum produsul acestor trei rapoarte, egale, este -1, fiecare din ele trebuie să fie egal cu -1, deci egalitatea are loc dacă $x=-y=z$. Din condiţia $x^2+y^2+z^2=1$ obţinem $x=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, valori pentru care $xy+yz-zx=-1$, deci valoarea minimă este -1 (se atinge).
A doua cale: tot din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, $x^2+y^2+z^2-2(xy+yz-zx)=(x-y+z)^2 \le (x^2+y^2+z^2)\big(1^2+(-1)^2+1^2\big)=3$, de unde $xy+yz-zx \ge -1$, cu egalitate dacă $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$, ceea ce, se arată ca mai sus, se întâmplă dacă $x=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
În concluzie, valoarea minimă este -1, iar cea maximă $\dfrac{1}{2}$.

Altă idee: Folosind semnul trinomului de gradul II, pentru minim se poate cerceta pentru ce valori ale lui m este adevărată inegalitatea $m(x^2+y^2+z^2) \leq xy+yz-zx$ pentru orice x, y, z, iar pentru maxim se poate cerceta pentru ce valori ale lui m este adevărată inegalitatea $m(x^2+y^2+z^2) \geq xy+yz-zx$ pentru orice x, y, z. Pentru minim, condiţia revine la $mx^2-x(y-z)+my^2+mz^2-yz \leq 0$, $\forall\, x, y, z$. Privit ca trinom de gradul II în variabila x (cazul $m = 0$ nu convine), trebuie ca $\Delta_x \leq 0$, $m < 0$, adică $m < 0$ şi $\Delta_x = -(4m^2-1)y^2+(2-4m)yz-(4m^2-1)z^2 \leq 0$, $\forall\, y, z$. Cum $m = \pm\dfrac{1}{2}$ nu convin, trebuie ca $1-4m^2 > 0$ şi $\Delta_y = 4z^2[(1-2m)^2-(1-4m^2)^2] \leq 0$, $\forall\, z$, adică $m < -\dfrac{1}{2}$ şi $-4m(2m-1)^2(m+1) \leq 0$. Rezultă $m \leq -1$, etc. Pentru maxim, trebuie atenţie pentru a nu scăpa cazul $m = \dfrac{1}{2}$.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $AC = BC$. Fie P un punct situat pe prelungirea segmentului $[AB]$, dincolo de B. Fie Q punctul de intersecţie, diferit de D, dintre segmentul $[PD]$ şi cercul circumscris lui ACD. Fie apoi R punctul de intersecţie, diferit de P, dintre segmentul $[PC]$ şi cercul circumscris lui APQ. Demonstraţi că dreptele AQ, BR şi CD sunt concurente.

Soluţie:
Deoarece $\sphericalangle ARC = 180° - \sphericalangle ARP = 180° - \sphericalangle AQP = \sphericalangle AQD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, patrulaterul $ABRC$ este inscriptibil.
Fie X puncul de intersecţie a dreptelor AQ şi CD. Arătăm că $X \in BR$.
Avem $\sphericalangle RQX = 180° - \sphericalangle RQA = \sphericalangle RPA = \sphericalangle RCX$, deci şi patrulaterul $CQRX$ este inscriptibil.
Atunci $\sphericalangle CRX = \sphericalangle CQX = 180° - \sphericalangle CQA = \sphericalangle CDA = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle BRC$, ceea ce arată că punctele R, R, X sunt coliniare.
vezi figura din soluţia oficială.