BARAJ NR. 3 JUNIORI FRANŢA 2022
23 martie 2022

1. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Fie ω semicercul de diametru $[BC]$ situat de aceeaşi parte a dreptei BC ca şi punctul A. Cercul de centru B şi rază AB intersectează din nou semicercul ω în punctul E. Dreapta AE intersectează din nou semicercul ω în punctul F. Demonstraţi că $AF = BF$.

2. Fie n un număr natural astfel încât $n \geq 3$. Lucie aranjează n foi albe de hârtie în cerc, apoi scrie câte un număr real pe fiecare foaie. Determinaţi numerele naturale k astfel încât $1 \leq k \leq n$ care au următoarea proprietate:

dacă nu toate numerele scrise de Lucie sunt egale cu 0, atunci exista k foi consecutive pentru care suma numerelor scrise pe ele este nenulă.

3. Pentru orice număr natural $n \geq 1$ notăm cu f_n suma resturilor obţinute împărţindu-l pe n la numerele $1, 2, \ldots, n$. De exemplu, dacă îl împărţim pe 5 la 1, 2, 3, 4 şi 5, obţinem resturile 0, 1, 2, 1 şi 0, astfel că $f_5 = 0+1+2+1+0 = 4$. Găsiţi toate numerele naturale $n \geq 2$ pentru care $f_n = f_{n-1} + n - 2$.

4. Fie m şi n două numere naturale astfel încât $m > n \geq 3$. Morgane a aranjat m jetoane în cerc şi se pregăteşte să le coloreze folosind n culori distincte. Ea doreşte ca, printre oricare $n+1$ jetoane consecutive, să existe mereu cel puţin un jeton din fiecare din cele n culori. Dacă ea poate realiza acest lucru, spunem că numărul m este n-colorabil.
Demonstraţi că, pentru orice număr natural $n \geq 3$, există doar un număr finit, nenul, de numere m care nu sunt n-colorabile şi determinaţi cel mai mare număr natural m care nu este n-colorabil.

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii:

1. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Fie ω semicercul de diametru $[BC]$ situat de aceeaşi parte a dreptei BC ca şi punctul A. Cercul de centru B şi rază AB intersectează din nou semicercul ω în punctul E. Dreapta AE intersectează din nou semicercul ω în punctul F. Demonstraţi că $AF = BF$.

Soluţie:
Triunghiul ABE este isoscel. Cum AB este tangentă la ω, avem $\sphericalangle BFE \equiv \sphericalangle EBA$, deci triunghiurile ABE şi AFB sunt asemenea (UU). Cum primul este isoscel, şi al doilea este isoscel, cu $AF = BF$.

2. Fie n un număr natural astfel încât $n \geq 3$. Lucie aranjează n foi albe de hârtie în cerc, apoi scrie câte un număr real pe fiecare foaie. Determinaţi numerele naturale k astfel încât $1 \leq k \leq n$ care au următoarea proprietate:

dacă nu toate numerele scrise de Lucie sunt egale cu 0, atunci exista k foi consecutive pentru care suma numerelor scrise pe ele este nenulă.

Soluţie:
Numerotăm în ordine, foile de la 1 la n şi notăm cu x_i numărul scris pe foaia cu numărul i. Indicii vor fi consideraţi modulo n. Enunţul ne cere atunci să găsim acele numere naturale k pentru care nu este posibil ca toate sumele $S_a = x_{a+1} + x_{a+2} + \ldots + x_{a+k}$ să fie 0 fără ca toate numerele x_i să fie nule.
Mai întâi, dacă există un număr natural $d \geq 2$ care divide atât k, cât şi n, atunci Lucie poate alege numerele x_i astfel încât $x_i = 1$ dacă $i \equiv 1 \pmod d$, $x_i = -1$ dacă $i \equiv 2 \pmod d$ şi $x_i = 0$ în caz contrar.
(E doar o alegere din multe: mai general, se pot alege d numere întregi, nu toate nule, cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_d = 0$ şi defini $x_i = a_j$ dacă $i \equiv j \pmod d$.) Cu această alegere a numerelor x_i, în orice sumă $S_a = x_{a+1} + x_{a+2} + \ldots + x_{a+k}$ este o sumă în care k/d termeni sunt egali cu 1, k/d termeni sunt egali cu -1, iar restul sunt 0. În consecinţă, orice astfel de număr întreg k (care are un divizor comun $d > 1$ cu n), nu este un număr cu proprietatea din enunţ.
În schimb, dacă k este prim cu n şi toate sumele S_a sunt nule, vom demonstra că $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Într-adevăr, pentru orice indice a, avem $x_a = x_a + S_a = x_a + x_{a+1} + \ldots + x_{a+k} = S_{a-1} + x_{a+k} = x_{a+k}$. Deducem că $x_a = x_{a+k\ell}$ pentru orice a şi ℓ. Ori dacă k este prim cu n, din relaţia lui Bézout, rezultă că există m, ℓ întregi cu $k\ell + mn = 1$, adică $k\ell \equiv 1 \pmod n$. Atunci, pentru orice a, avem $x_0 = x_{ak\ell} = x_a$. Astfel, toate numerele x_i sunt egale cu x_0, deci fiecare sumă S_a este egală cu kx_0. Atunci $S_a = 0$ implică $x_0 = 0$ şi deci că toate numerele x_i sunt nule.
În concluzie, numerele k căutate sunt cele prime cu n.

3. Pentru orice număr natural $n \geq 1$ notăm cu f_n suma resturilor obţinute împărţindu-l pe n la numerele $1, 2, \ldots, n$. De exemplu, dacă îl împărţim pe 5 la 1, 2, 3, 4 şi 5, obţinem resturile 0, 1, 2, 1 şi 0, astfel că $f_5 = 0+1+2+1+0 = 4$. Găsiţi toate numerele naturale $n \geq 2$ pentru care $f_n = f_{n-1} + n - 2$.

Soluţie:
Pentru orice două numere naturale a şi b cu $a \leq a \leq b$ notăm cu $r_a(b)$ restul obţinut împărţindu-l pe b la a.
Aşadar, $f_b = \sum\limits_{a=1}^{b} r_a(b)$, deci $f_n - f_{n-1} = \sum\limits_{a=1}^{n} r_a(n) - \sum\limits_{a=1}^{n-1} r_a(n-1)$. Deoarece $r_1(n) = r_1(n-1) = r_n(n) = 0$, putem scrie

$$f_n - f_{n-1} = \sum_{a=2}^{n-1} r_a(n) - \sum_{a=2}^{n-1} r_a(n-1) = \sum_{a=2}^{n-1} \big(r_a(n) - r_a(n-1)\big).$$

Dar $r_a(n) - r_a(n-1) = 1$ dacă a nu divide n şi $r_a(n) - r_a(n-1) = 1 - a$ dacă a divide n, astfel că, în orice caz, avem $r_a(n) - r_a(n-1) \leq 1$, $\forall\, a < n$. Diferenţa $f_n - f_{n-1}$, care este o sumă de $n-2$ asemenea termeni, dă $n-2$ dacă şi numai dacă toţi termenii sunt egali cu 1, adică a nu divide n pentru niciun $a \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, cu alte cuvinte dacă şi numai dacă n este număr prim.

4. Fie m şi n două numere naturale astfel încât $m > n \geq 3$. Morgane a aranjat m jetoane în cerc şi se pregăteşte să le coloreze folosind n culori distincte. Ea doreşte ca, printre oricare $n+1$ jetoane consecutive, să existe mereu cel puţin un jeton din fiecare din cele n culori. Dacă ea poate realiza acest lucru, spunem că numărul m este n-colorabil.
Demonstraţi că, pentru orice număr natural $n \geq 3$, există doar un număr finit, nenul, de numere m care nu sunt n-colorabile şi determinaţi cel mai mare număr natural m care nu este n-colorabil.

Soluţie:
Arătăm mai întâi că dacă $m \geq n^2 - n$, Morgane poate realiza ceea ce şi-a propus procedând în felul următor: îl imparte pe m cu rest la n; dacă $m = cn + r$, cu $0 \leq r < n$, atunci Morgane aşază pe un cerc c grupe a câte n jetoane. Jetoanele din fiecare grup de n jetoane vor fi colorate, în ordine, cu culorile $1, 2, \ldots, n$, astfel că momentan avem $cn = m - r$ jetoane colorate, în ordine: $1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n, \ldots, 1, 2, \ldots, n$.
Dacă $m \geq n^2 - n$, câtul împărţirii lui m la n va fi cel puţin $n - 1$, deci vom avea $c \geq n - 1 \geq r$. Avem c grupe de câte n jetoane şi mai avem pe pus pe cerc încă r jetoane. Alegem r din cele c grupe şi la sfârşitul lor, după jetonul de culoarea n a grupei, înainte de jetonul de culoarea 1 a grupei următoare, intercalăm un jeton de o culoare oarecare. Practic, acum vom avea r grupe a câte $n+1$ jetoane (de culori $1, 2, \ldots, n$ şi ?) şi în rest $c - r$ grupe de câte n jetoane (de culori $1, 2, \ldots, n$).

Orice secvenţă formată din $n+1$ jetoane consecutive conţine jetoane din fiecare culoare. Aşadar, m este n-colorabil dacă $m \geq n^2 - n$.

În continuare vom demonstra că $n^2 - n - 1$ nu este n-colorabil, deci cel mai mare număr care nu este n-colorabil este $n^2 - n - 1$.
Presupunând contrariul, am colorat cele $n^2 - n - 1$ jetoane cu n culori astfel încât fiecare secvenţă de $n+1$ jetoane consecutive conţine fiecare culoare. Din principiul cutiei, va exista o culoare care a fost folosită cel puţin o dată, dar cel mult de $n-2$ ori (altminteri, am avea cel puţin $n(n-1)$ jetoane). Să numim această culoare culoarea 1. Între două jetoane succesive de culoarea 1 (adică două între care nu mai există alte jetoane de culoarea 1) putem avea cel mult n jetoane (altminteri s-ar crea o secvenţă de $n+1$ jetoane consecutive din care culoarea 1 lipseşte). Aşadar, pe cerc, putem avea cel mult $n(n-2) + n - 2 = n^2 - n - 2$ jetoane, contradicţie.

Remarcă: Modificând puţin raţionamentul de mai sus, se poate arăta că m este n-colorabil dacă şi numai dacă există numerele naturale k şi ℓ astfel încât $m = kn + \ell(n+1)$. Determinarea acestor numere este un caz particular al problemei lui Frobenius. În termenii folosiţi în articolul precedent, numărul căutat este cea mai mare non-francatură pentru $a = n$, $b = n+1$, anume $ab - a - b = n(n+1) - n - (n+1) = n^2 - n - 1$.