

BARAJ NR. 2 JUNIORI FRANȚA 2022
20-21 februarie 2022

1. Fie a, b, c, d numere naturale nenule cu proprietatea $a! + b! = c! + d!$.
Demonstrați că $ab = cd$.

2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și fie D un punct situat în interiorul triunghiului ABC . Dreptele AD și BD intersectează din nou cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A_1 , respectiv B_1 . Cercul circumscris triunghiului B_1DA intersectează din nou dreapta AC în punctul P . Cercul circumscris triunghiului A_1BD intersectează din nou dreapta BC în punctul Q .
Demonstrați că patrulaterul $CPDQ$ este un paralelogram.

3. Maena și Théodore joacă un joc pe o tablă pătrată împărțită în 99×99 pătrățele. Spunem că două pătrățele sunt vecine dacă ele au un vârf sau o latură comună. La început, Maena numerotează pătrățelele tablei de la 1 la 99^2 într-o ordine arbitrară. Théodore plasează un jeton pe unul din pătrățelele tablei, apoi el poate efectua mutări de tipul următor: el poate deplasa jetonul dintr-un pătrățel vecin dacă acesta are un număr mai mare decât pătrățelul pe care se afla jetonul înainte de mutare. Care este numărul de mutări pe care Théodore poate garanta că le poate face, indiferent de modul în care Maena a făcut numerotarea pătrățelelor?

4. Fie p și q două numere prime diferite astfel încât $p < 2q$ și $q < 2p$. Arătați că există două numere întregi consecutive dintre care unul îl are pe p drept cel mai mare divizor prim, iar celălalt îl are pe q drept cel mai mare divizor prim.

Timp de lucru: 4 ore