BARAJ NR. 2 JUNIORI FRANŢA 2022
20-21 februarie 2022

1. Fie a, b, c, d numere naturale nenule cu proprietatea $a! + b! = c! + d!$.
Demonstraţi că $ab = cd$.

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D un punct situat în interiorul triunghiului ABC. Dreptele AD şi BD intersectează din nou cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A_1, respectiv B_1. Cercul circumscris triunghiului B_1DA intersectează din nou dreapta AC în punctul P. Cercul circumscris triunghiului A_1BD intersectează din nou dreapta BC în punctul Q.
Demonstraţi că patrulaterul $CPDQ$ este un paralelogram.

3. Maena şi Théodore joacă un joc pe o tablă pătrată împărţită în 99×99 pătrăţele. Spunem că două pătrăţele sunt vecine dacă ele au un vârf sau o latură comună.
La început, Maena numerotează pătrăţelele tablei de la 1 la 99^2 într-o ordine arbitrară. Théodore plasează un jeton pe unul din pătrăţelele tablei, apoi el poate efectua mutări de tipul următor: el poate deplasa jetonul dintr-un pătrăţel vecin dacă acesta are un număr mai mare decât pătrăţelul pe care se afla jetonul înainte de mutare. Care este numărul de mutări pe care Théodore poate garanta că le poate face, indiferent de modul în care Maena a făcut numerotarea pătrăţelelor?

4. Fie p şi q două numere prime diferite astfel încât $p < 2q$ şi $q < 2p$. Arătaţi că există două numere întregi consecutive dintre care unul îl are pe p drept cel mai mare divizor prim, iar celălalt îl are pe q drept cel mai mare divizor prim.

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii:

1. Fie a, b, c, d numere naturale nenule cu proprietatea $a! + b! = c! + d!$.
Demonstraţi că $ab = cd$.

Soluţia 1:
Să presupunem, fără a pierde din generalitate, că $a \leq b$, $c \leq d$ şi $a \leq c$. Atunci

$$b! = c! - a! + d! \geq d!,$$

deci $b \geq d$, astfel că $a \leq c \leq d \leq b$. Numărul $c!$ divide deci $c! + d! - b! = a!$, ceea ce înseamnă că $c \leq a$, şi deci că $a = c$. Conchidem că $b! = d!$, deci că $b = d$, adică $ab = cd$.

Soluţia 2:
Să presupunem din nou că $a \leq b$, $c \leq d$ şi $a \leq c$. Dacă $a = c$, putem concluziona ca mai sus că $b = d$ şi $ab = cd$.
Dacă $a \neq c$, atunci $(a+1)! \geq 2 \cdot a!$ divide $c! + d! = a! + b!$ şi, cum $(a+1)!$ nu divide termenul $a!$ al sumei $a! + b!$, e; nu divide nici termenul $b!$. Asta înseamnă că $a = b$. Dubla inegalitate

$$a! + b! \geq c! + d! \geq 2 \cdot a! = a! + b!$$

devine atunci o egalitate, deci $a = b = c = d$, ceea ce contrazice $a \neq c$.

Soluţia 3:
Să presupunem că $a \leq b$ şi $c \leq d$. Dacă $b < d$, atunci

$$c! + d! > d! \geq (b+1)! = (b+1) \cdot b! \geq 2 \cdot b! \geq a! + b!,$$

ceea ce este absurd. Deducem că $b \leq d$ şi, analog, că $d \leq b$. Astfel, $b = d$ şi $a! = c!$, deci $a = c$ şi $ab = cd$.

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie D un punct situat în interiorul triunghiului ABC. Dreptele AD şi BD intersectează din nou cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A_1, respectiv B_1. Cercul circumscris triunghiului B_1DA intersectează din nou dreapta AC în punctul P. Cercul circumscris triunghiului A_1BD intersectează din nou dreapta BC în punctul Q.
Demonstraţi că patrulaterul $CPDQ$ este un paralelogram.

Soluţie:
Avem $\sphericalangle DQB \equiv \sphericalangle DA_1B = \sphericalangle AA_1B \equiv \sphericalangle ACB$ şi, analog, $\sphericalangle DPA \equiv \sphericalangle DB_1A \equiv \sphericalangle ACB$. Din prima congruenţă de unghiuri rezultă $QD \parallel CP$, iar din cea de-a două că $DQ \parallel CP$. Conchidem că $CPDQ$ este paralelogram.

3. Maena şi Théodore joacă un joc pe o tablă pătrată împărţită în 99×99 pătrăţele. Spunem că două pătrăţele sunt vecine dacă ele au un vârf sau o latură comună. La început, Maena numerotează pătrăţelele tablei de la 1 la 99^2 într-o ordine arbitrară. Théodore plasează un jeton pe unul din pătrăţelele tablei, apoi el poate efectua mutări de tipul următor: el poate deplasa jetonul dintr-un pătrăţel vecin dacă acesta are un număr mai mare decât pătrăţelul pe care se afla jetonul înainte de mutare. Care este numărul de mutări pe care Théodore poate garanta că le poate face, indiferent de modul în care Maena a făcut numerotarea pătrăţelelor?

Soluţie:
Théodore poate garanta efectuarea a 3 mutări, dar nu poate garanta mai multe. Théodore poate întotdeauna efectua 3 mutări astfel: el alege un pătrat 2×2, apoi parcurge pătrăţelele în ordinea crescătoare a numerelor scrise în respectivele pătrăţele. Pătrăţelele sunt vecine deoarece ele au, toate, un vârf comun.

Arătăm în continuare că Maena îl poate împiedica pe Théodore să facă 4 mutări. Ea numeroatează liniile şi coloanele, în ordine, de la 1 la 99 şi împarte cele 99×99 pătrăţele în 4 categorii:
- categoria 1, a pătrăţelelor situate pe o linie cu număr impar şi coloană cu număr impar;
- categoria 2, a pătrăţelelor situate pe o linie cu număr par şi coloană cu număr impar;
- categoria 3, a pătrăţelelor situate pe o linie cu număr impar şi coloană cu număr par;
- categoria 4, a pătrăţelelor situate pe o linie cu număr par şi coloană cu număr par.

Apoi, ea scrie numerele în ordine crescătoare astfel: cele mai mici în pătrăţelele de categoria 1, următoarele numere în pătrăţelele de categoria 2, apoi numerele care urmează în pătrăţelele de categoria 3 şi, în fine, numerele cele mai mari în pătrăţelele de categoria 4.
Să observăm că două pătrăţele de aceeaşi categorie nu sunt vecine, deci nu există mutări între două asemenea pătrăţele. De asemenea, cum numerele cresc odată cu categoria, toate mutările cresc numărul categoriei, astfel că se pot efectua doar 3 mutări.

4. Fie p şi q două numere prime diferite astfel încât $p<2q$ şi $q<2p$. Arătaţi că există două numere întregi consecutive dintre care unul îl are pe p drept cel mai mare divizor prim, iar celălalt îl are pe q drept cel mai mare divizor prim.

Soluţie:
Să presupunem fără a pierde din generalitate că $p\leq q$. Identitatea lui Bézout arată că există numere întregi a şi b astfel încât $ap+bq=1$. Putem întotdeauna înlocui o astfel de pereche (a,b) cu $(a\pm q, b\mp p)$. După mai multe asemenea înlocuiri putem

obţine o pereche (a, b) pentru care $ap + bq = 1$ şi pentru care $|a|$ este minimă. Atunci ştim că $|a \pm q| \geq |a|$, deci $|a| \leq \dfrac{q}{2} < p$. În plus, cum $|ap + bq| = 1 \leq p + q$, numerele întregi a şi b trebuie să fie de semne contrare, astfel că numerele $n = |a| \cdot p$ şi $m = |b| \cdot q$ sunt numere naturale consecutive. Deoarece $|a| < p$, cel mai mare divizor prim al lui n este p. În plus, $m \leq n + 1 \leq p^2 \leq q^2$, deci cel mai mare divizor prim al lui m este q. Aşadar, numerele m şi n satisfac condiţiile din enunţ.