# BARAJ NR. 1 JUNIORI FRANŢA 2022
**12 ianuarie 2022**

**1.** Martin a turnat în grabă $n$ litri de apă în $n$ sticle. Urmarea este că unele sticle sunt mai pline decât altele. Abia acum Martin îşi aduce aminte că sarcina sa era aceeea de a pune exact câte un litru în fiecare sticlă şi apoi de a pune capacul acesteia. Cum el nu a pus încă la nicio sticlă capacul, el mai poate repara prostia făcută. În acest scop, el alege o primă sticlă, toarnă o parte din conţinutul acesteia într-o altă sticlă (dacă doreşte), apoi pune capacul la prima sticlă. Apoi, el alege o a doua sticlă (care poate fi cea în care tocmai a turnat apă sau o altă sticlă), toarnă o parte din conţinut într-o altă sticlă (dar nu în prima care are deja capacul pus), apoi pune capacul sticlei din care a durnat. Apoi, Martin procedează similar cu sticla a treia, ş.a.m.d.,până când toate sticlele au capacul pus. Demonstraţi că dacă Martin alege în mod judicios ordinea sticlelor din care toarnă şi cărora le pune capacul, el va reuşi să-şi repare prostia.
*Notă:* Sticlele sunt imense, fiecare din ele putând conţine $n$ litri de apă, astfel că nu este posibil ca turnând apă într-o sticlă, apa să dea pe-alături.

**2.** Aline şi Théo joacă următorul joc. Mai întâi Théo alege o mulţime infinită de numere prime $\{p_1, p_2, \ldots\}$, apoi Aline alege o mulţime infinită de numere naturale nenule, $\{n_1, n_2, \ldots\}$. În fine, Théo alege două numere naturale nenule, $k$ şi $\ell$. Théo câştigă jocul dacă există o infinitate de numere naturale $n_i$ care nu sunt divizibile cu $p_k^\ell$. În caz contrar câştigă Aline.
a) Care din cei doi jucători are o strategie câştigătoare?
b) Pentru a complica şi mai mult jocul, Aline are de-acum o constrângere suplimentară: fiecare din numerele $n_i$ poate să dividă numai un număr finit dintre numerele $n_j$. Cu noile reguli, care din cei doi are o strategie câştigătoare?
(Fiecare jucător cunoaşte alegerile anterioare ale adversarului.)

**3.** Fie $ABC$ un triunghi şi $\Omega$ cercul său circumscris. Fie $D$ piciorul înălţimii duse din vârful $A$. Bisectoarea unghiului $A$ intersectează segmentul $[BC]$ în punctul $P$ şi taie a doua oară cercul $\Omega$ în punctul $S$. Fie $A'$ punctul diametral opus punctului $A$ în cercul $\Omega$. Demonstraţi că dreptele $SD$ şi $A'P$ se intersectează pe cercul $\Omega$.

**4.** Fie $n$ un număr natural nenul. Anna a scris $4n+2$ numere naturale, distincte două câte două, mai mici sau egale cu $5^n$. Demonstraţi că printre numerele scrise de ea există trei, să le zicem $a$, $b$ şi $c$, astfel încât $a < b < c$ şi $c + 2a > 3b$.

*Timp de lucru: 4 ore*

**Soluţii:**

**1.** Martin a turnat în grabă $n$ litri de apă în $n$ sticle. Urmarea este că unele sticle sunt mai pline decât altele. Abia acum Martin îşi aduce aminte că sarcina sa era aceeea de a pune exact câte un litru în fiecare sticlă şi apoi de a pune capacul acesteia. Cum el nu a pus încă la nicio sticlă capacul, el mai poate repara prostia făcută. În acest scop, el alege o primă sticlă, toarnă o parte din conţinutul acesteia într-o altă sticlă (dacă doreşte), apoi pune capacul la prima sticlă. Apoi, el alege o a doua sticlă (care poate fi cea în care tocmai a turnat apă sau o altă sticlă), toarnă o parte din conţinut într-o altă sticlă (dar nu în prima care are deja capacul pus), apoi pune capacul sticlei din care a durnat. Apoi, Martin procedează similar cu sticla a treia, ş.a.m.d.,până când toate sticlele au capacul pus. Demonstraţi că dacă Martin alege în mod judicios ordinea sticlelor din care toarnă şi cărora le pune capacul, el va reuşi să-şi repare prostia.
*Notă:* Sticlele sunt imense, fiecare din ele putând conţine $n$ litri de apă, astfel că nu este posibil ca turnând apă într-o sticlă, apa să dea pe-alături.

**Soluţie:**
Vom proceda prin inducţie după $n$.
Mai întâi, pentru $n = 1$, avem o singură sticlă, în care se găseşte exact un litru de apă, deci îi putem pune capacul fără să facem nimic.
Apoi, dacă $n \geq 2$, Martin alege sticla cea mai plină. Deoarece în medie sticlele conţin un litru de apă, sticla cea mai plină va conţine cel puţin un litru. Astfel, Martin va alege o sticlă şi va turna în ea surplusul de apă existent în sticla cea mai plină, până când aceasta va ajunge să conţină exact un litru de apă. Martin îi pune capacul şi rămâne cu $n - 1$ litri repartizaţi cumva în $n - 1$ sticle. Conform ipotezei de inducţie, el poate redistribui apa din cele $n - 1$ sticle astfel încât să obţină câte un litru în fiecare.

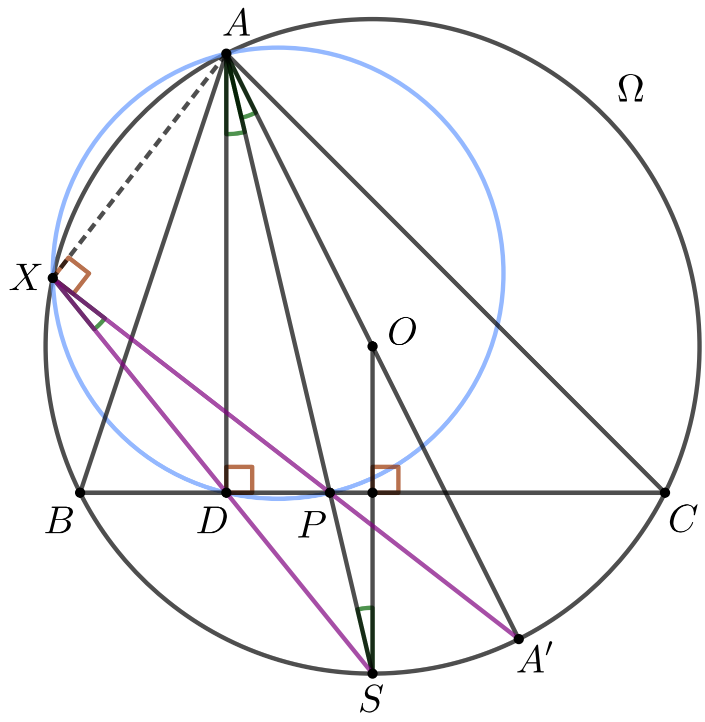
**2.** Aline şi Théo joacă următorul joc. Mai întâi Théo alege o mulţime infinită de numere prime $\{p_1, p_2, \ldots\}$, apoi Aline alege o mulţime infinită de numere naturale nenule, $\{n_1, n_2, \ldots\}$. În fine, Théo alege două numere naturale nenule, $k$ şi $\ell$. Théo câştigă jocul dacă există o infinitate de numere naturale $n_i$ care nu sunt divizibile cu $p_k^\ell$. În caz contrar câştigă Aline.
a) Care din cei doi jucători are o strategie câştigătoare?
b) Pentru a complica şi mai mult jocul, Aline are de-acum o constrângere suplimentară: fiecare din numerele $n_i$ poate să dividă numai un număr finit dintre numerele $n_j$. Cu noile reguli, care din cei doi are o strategie câştigătoare?
(Fiecare jucător cunoaşte alegerile anterioare ale adversarului.)

**Soluţie:**
a) Aline are strategie câştigătoare. O asemenea strategie este să aleagă numerele $n_j = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_j)^j$. Într-adevăr, oricum ar alege Théo numerele $k$ şi $\ell$, vom avea

$p_k^\ell \mid n_j$ pentru orice $j \geq \max\{k, \ell\}$.
b) De această dată Théo are strategie câştigătoare. El alege toate numerele prime (alege $p_j$ al $j$-lea număr prim). Apoi, odată ce Aline a ales numerele $n_j$, Théo consideră descompunerea în factori primi a lui $n_1$ (dacă $n_1 > 1$, în caz contrar se uită la descompunerea lui $n_2$): $n_1 = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{a_t}$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_t$ sunt numere naturale (posibil nule). Vom arăta că Théo poate alege un $k \leq t$ şi $\ell = a_k$ cu care să câştige. Presupunând că toate aceste alegeri sunt necâştigătoare, există un număr finit de $n_j$-uri nedivizibile cu $p_1^{a_1}$, un număr finit de $n_j$-uri nedivizibile cu $p_2^{a_2}$, ş.a.m.d. un număr finit de $n_j$-uri nedivizibile cu $p_t^{a_t}$. Aşadar, cu excepţia unui număr finit de $n_j$-uri, toţi ceilalţi sunt divizibili cu $p_1^{a_1}$, $p_2^{a_2}$, ... , $p_t^{a_t}$, deci şi cu produsul acestora, $n_1$. Aşadar, printre numerele alese de Aline se găsesc o infinitate care sunt divizibile cu $n_1$, ceea ce încalcă acea constrângere suplimentară.

**3.** Fie $ABC$ un triunghi şi $\Omega$ cercul său circumscris. Fie $D$ piciorul înălţimii duse din vârful $A$. Bisectoarea unghiului $A$ intersectează segmentul $[BC]$ în punctul $P$ şi taie a doua oară cercul $\Omega$ în punctul $S$. Fie $A'$ punctul diametral opus punctului $A$ în cercul $\Omega$. Demonstraţi că dreptele $SD$ şi $A'P$ se intersectează pe cercul $\Omega$.

**Soluţie:**
Dacă $AB = AC$, dreptele $SD$ şi $A'P$ coincid şi nu avem ce demonstra.
În cntinuare vom presupune $AB < AC$. Cazul $AC < AB$ fiind analog.
Vom proceda prin redefinirea punctului: fie $X$ punctul în care dreapta $A'P$ intersectează din nou cerul $\Omega$. Arătăm că $X \in SD$, ceea ce demonstrează că dreptele $SD$ şi $A'P$ se intersectează în $X \in \Omega$.
Fie $O$ centrul cercului $\Omega$. Punctul $S$ este mijlocul arcului $BC$ (*polul Sud* ar cercului circumscris), care se găseşte pe mediatoarea lui $[BC]$, care este tocmai dreapta $OS$.
Avem, pe de-o parte, $\sphericalangle SXA' \equiv \sphericalangle SAA' \equiv \sphericalangle OSA \equiv \sphericalangle DAP$ (fiindcă $AD \parallel OS$).
Pe de altă parte, deoarece $[AA']$ este diametru în $\Omega$, $m(\sphericalangle AXA') = 90°$, deci $X$ şi $D$ se află pe cercul de diametru $[AP]$, deci punctele $A, X, D, P$ sunt conciclice.
Rezultă că $\sphericalangle DXP \equiv \sphericalangle DAP$.
Conchidem că $\sphericalangle DXP \equiv \sphericalangle SXA'$, deci punctele $S, D, X$ sunt coliniare, de unde concluzia.




**4.** Fie $n$ un număr natural nenul. Anna a scris $4n+2$ numere naturale, distincte două câte două, mai mici sau egale cu $5^n$. Demonstraţi că printre numerele scrise de ea există trei, să le zicem $a$, $b$ şi $c$, astfel încât $a < b < c$ şi $c + 2a > 3b$.

**Soluţie:**
Fie $x_1 < x_2 < \ldots < x_{4n+2}$ cele $4n+2$ numere scrise de Anna. Vom demonstra că există un indice $k \leq 4n$ astfel încât $x_{4n+2} + 2x_k > 3x_{k+1}$. Într-adevăr, presupunând contrariul, să notăm $y_k = x_{4n+2} - x_k$ pentru orice $k$, $(1 \leq k \leq 4n+1)$; atunci $3y_{k+1} = 3x_{4n+2} - 3x_{k+1} \leq 2x_{4n+2} - 2x_k = 2y_k$ pentru orice $k$.
Deducem că $y_k \geq \frac{3}{2} \cdot y_{k+1}$ pentru orice $k \leq 4n$, deci

$$5^n \geq y_1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{4n} \cdot y_{4n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{4n} = \left(5 + \frac{1}{16}\right)^n,$$

ceea ce este imposibil.