BARAJ NR. 4 JUNIORI FRANŢA 2021
12 mai 2021

1. Fie $ABCDE$ un pentagon convex astfel încât $m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle ACE) = m(\sphericalangle ADE) = 90^\circ$ şi $BC = CD$. În fine, fie K un punct pe semidreapta $[AB$ astfel încât $AK = AD$, şi fie L un punct pe semidreapta $[ED$ astfel încât $EL = BE$. Demonstraţi că punctele B, D, K şi L aparţin unui cerc cu centrul în C.

2. Determinaţi toate cvadrupletele (a, b, c, p) de numere întregi în care $p > 0$ este un număr prim şi pentru care

$$73p^2 + 6 = 9a^2 + 17b^2 + 17c^2.$$

3. Pentru a se antrena în vederea ultimului baraj de anul acesta, Jean-Baptiste şi Marie-Odile au colecţionat 100 de probleme de matematică şi se apucă de realizarea unui program de recapitulare. În perioada de 100 de zile care îi separă de baraj, fiecare din ei trebuie să rezolve o problemă pe zi. Notăm cu x numărul problemelor pe care Jean-Baptiste le are de rezolvat înaintea lui Marie-Odile şi cu y numărul problemelor pe care Marie-Odile le are rezolvat înaintea lui Jean-Baptiste. În fine, spunem despre un program de recapitulare este echitabil dacă $x = y$. Demonstraţi că există cel puţin $100! \cdot \left(2^{50} + (50!)^2\right)$ programe echitabile.

4. Determinaţi toate numerele reale x şi y astfel încât

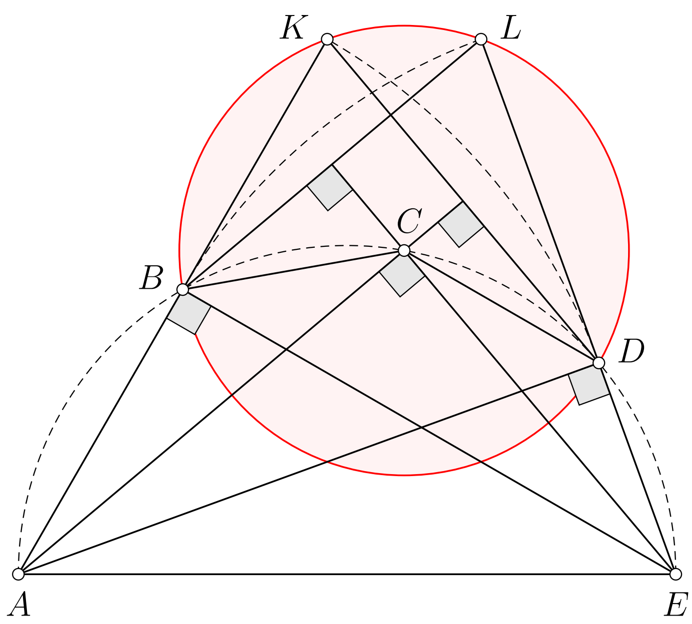
$$\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(y - \sqrt{y^2+1}\right) = 1 \text{ şi } (x^2 + y + 2)(y^2 + x + 2) = 8.$$

Timp de lucru: 4 ore

Soluţii oficiale:

1. Fie $ABCDE$ un pentagon convex astfel încât $m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle ACE) = m(\sphericalangle ADE) = 90°$ şi $BC = CD$. În fine, fie K un punct pe semidreapta $[AB$ astfel încât $AK = AD$, şi fie L un punct pe semidreapta $[ED$ astfel încât $EL = BE$. Demonstraţi că punctele B, D, K şi L aparţin unui cerc cu centrul în C.

Soluţie:
Datorită unghiurilor drepte din B, C şi D, punctele A, B, C, D şi E aparţin unui acelaşi semicerc de diametru $[AE]$. Cum $BC = CD$, punctul C este polul Sud relativ la vârful A în triunghiul ABD (adică mijlocul arcului BD al cercului circumscris triunghiului ABD). Aşadar, AC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAB$, adică mediatoarea lui $[KD]$. Analog, CE este la mediatoarea lui $[BL]$. Asta înseamnă că $CL = BC = DC = CK$, de unde concluzia.



2. Determinaţi toate cvadrupletele (a, b, c, p) de numere întregi în care $p > 0$ este un număr prim şi pentru care

$$73p^2 + 6 = 9a^2 + 17b^2 + 17c^2.$$

Soluţie: (a se vedea şi problema NT2 din JBMO ShL 2020)
Analizând ecuaţia modulo 8 constatăm că, dacă p este impar, atunci $73p^2 + 1 \equiv 7 \pmod 8$, în timp ce $9a^2 + 17b^2 + 17c^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \pmod 8$. Dar un pătrat poate fi congruent cu 0, 1 sau 4 (mod 8), deci suma a trei pătrate nu este niciodată congruentă cu 7 (mod 8), prin urmare egalitatea din enunţ nu poate avea loc pentru p impar.

Rămâne, aşadar, cazul $p = 2$. Ecuaţia devine $9a^2 + 17b^2 + 17c^2 = 298$. Modulo 17 avem $9a^2 \equiv 9$, deci $17 \mid (a-1)(a+1)$. Deducem că $a = \pm 1$ (altminteri $|a| \geq 15$ şi $9a^2 + 17b^2 + 17c^2 > 298$). Ajungem la $17(b^2 + c^2) = 289$, deci $b^2 + c^2 = 17$. Singurele soluţii sunt cu $b = \pm 1$, $c = \pm 4$ sau invers. Aşadar, soluţiile ecuaţiei din enunţ sunt $(\pm 1, \pm 1, \pm 4, 2)$ şi $(\pm 1, \pm 4, \pm 1, 2)$ (toate combinaţiile posibile de semne).

3. Pentru a se antrena în vederea ultimului baraj de anul acesta, Jean-Baptiste şi Marie-Odile au colecţionat 100 de probleme de matematică şi se apucă de realizarea unui program de recapitulare. În perioada de 100 de zile care îi separă de baraj, fiecare din ei trebuie să rezolve o problemă pe zi. Notăm cu x numărul problemelor pe care Jean-Baptiste le are de rezolvat înaintea lui Marie-Odile şi cu y numărul problemelor pe care Marie-Odile le are de rezolvat înaintea lui Jean-Baptiste. În fine, spunem despre un program de recapitulare este echitabil dacă $x = y$. Demonstraţi că există cel puţin $100! \cdot \left(2^{50} + (50!)^2\right)$ programe echitabile.

Soluţie: (a se vedea şi problema C2 din JBMO ShL 2020)
Numerotăm problemele în ordinea în care le-a rezolvat Jean-Baptiste (problema rezolvată de acesta în ziua j va fi problema j). Problemele pot fi numerotate în 100! moduri. Vom arăta că, pentru fiecare din aceste 100! ordini diferite în care poate rezolva Jean-Baptiste problemele, există cel puţin $250 + (50!)^2$ ordini în care Marie-Odile poate rezolva aceste probleme astfel încât exact jumătate din probleme să fie rezolvate de ea înaintea lui Jean-Baptiste.
Avem cel puţin două categorii (disjuncte) se asemenea ordini:
1. Marie-Odile rezolvă în primele 50 de zile exact problemele pe care Jean-Baptiste le rezolvă în ultimele 50 de zile. Ea va rezolva în ultimele 50 de zile problemele de la 1 la 50 (într-o anumită ordine). Astfel, Marie-Odile va rezolva înaintea lui Jean-Baptiste problemele cu număr mare (mai mare ca 50), iar Jean-Baptiste va rezolva înaintea lui Marie-Odile primele 50 de probleme. Cum primele 50 de probleme şi ultimele 50 de probleme pot fi permutate (în mod independent) în câte 50! moduri, obţinem $(50!)^2$ ordini diferite în care Marie-Odile rezolvă exact jumătate dintre probleme înaintea lui Jean-Baptiste.
2. Vom grupa problemele în 25 de grupuri de câte 4. Marie-Odile va rezolva grupele în aceeaşi ordine ca şi Jean-Baptiste, dar dacă acesta a rezolvat problemele din grupa $k+1$, anume $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, $4k+4$ în această ordine, Marie-Odile va rezolva mai întâi ultimele două probleme din grup (2 ordini posibile), apoi primele două probleme din grup (2 ordini posibile). Astfel, în fiecare grup, Marie-Odile va rezolva 2 probleme înaintea lui Jean-Baptiste, iar acesta va rezolva celelalte două înaintea lui Marie-Odile.
Cele două categorii sunt disjuncte. În total, am obţinut aşadar $100! \cdot \left(2^{50} + (50!)^2\right)$ programe echilibrate.

Remarcă: În categoria 2, Marie-Odile are de fapt 7 variante în fiecare grup de 4, deci sunt cel puţin $100! \cdot \left(7^{25} + (50!)^2\right)$ programe echilibrate.

4. Determinaţi toate numerele reale x şi y astfel încât

$$\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=1 \text{ şi } (x^2+y+2)(y^2+x+2)=8.$$

Soluţie:
Fie (x,y) o eventuală soluţie. Egalităţile

$$\begin{cases} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x^2-(x^2+1)=-1 \\ \left(y-\sqrt{y^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=y^2-(y^2+1)=-1 \end{cases}$$

arată că avem de fapt

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y & (1) \\ \sqrt{x^2+1}-x=y+\sqrt{y^2+1}. & (2) \end{cases}$$

Relaţiile (1) şi (2) arată că $x=-y$, iar egalitatea $(x^2+y+2)(y^2+x+2)=8$ se scrie atunci ca

$$8=(x^2-x+2)(x^2+x+2)=(x^2+2)^2-x^2.$$

Dacă notăm $z=x^2$, deducem că $0=(z+2)^2-z-8=z^2+3z-4=(z+3/2)^2-25/4=(z+3/2)^2-(5/2)^2=(z+4)(z-1)$.
Dar cum $z=x^2\geq 0$, deducem că $z=1$, deci $x=\pm 1$ şi $y=-x=\mp 1$.
Reciproc, se vede uşor că, atunci când $(x,y)=(\pm 1,\mp 1)$, ambele egalităţi din enunţ sunt verificate. În concluzie, cele două soluţii sunt

$$(x,y)=(1,-1) \text{ şi } (x,y)=(-1,1).$$